Glossa, n° 83 (4-18), 2003,

RÉSUMÉ :

Ce travail a pour but de présenter un outil d'évaluation des compétences numériques destiné aux enfants en très grandes difficultés d'apprentissage en mathématiques : l'ECPN (Épreuves Conceptuelles de résolution de Problèmes Numériques). Il vient en complément des outils qui mesurent des performances arithmétiques, de ceux qui se centrent sur la compréhension des mécanismes de traitement des nombres ou de ceux qui analysent le développement des compétences logico-mathématiques des sujets. Il se situe dans une perspective didactique et fonctionnelle : il cherche à dégager les aspects conceptuels des nombres utilisés par les enfants pour résoudre des situations-problèmes, c'est-à-dire qu'il place les sujets devant des problèmes qui nécessitent le recours à des propriétés mathématiques.

Il explore essentiellement, chez les enfants, les capacités de conceptualisation des notions numériques fondamentales : l'évaluation des quantités, l'égalisation des collections, les comparaisons et les transformations des quantités, qui représentent les principales fonctions du nombre.

L'optique retenue est celle d'une évaluation qualitative. Le test permet l'analyse des différentes procédures que met en œuvre un sujet pour résoudre les problèmes proposés : comment contrôle-t-il ses actions en situation, comment choisit-il ses stratégies, comment les modifie-t-il au cours de la résolution en fonction des résultats obtenus, comment planifie-t-il son action, peut-il ou non expliciter ce qu'il réalise ?

Ces épreuves n'exigent que peu de connaissances techniques puisque, d'une part ne sont en jeu que de petites quantités et que d'autre part le recours à l'écrit est évité ainsi que l'appel explicite à la mémorisation des faits numériques. Ce test a été conçu par une équipe multidisciplinaire[2], pour des praticiens, de telle sorte qu'il soit simple et rapide à faire passer, avec la perspective de leur fournir une aide pour des actions de remédiation.

[1]ECPN : Epreuves Conceptuelles de résolution des Problèmes Numériques, conçu par CIMETE, 1995.

MOTS-CLÉS :

Difficultés d'apprentissage - Évaluation conceptuelle - Compétences numériques - Fonctions numériques - Problème arithmétique - Didactique des mathématiques - Remédiation

Françoise DUQUESNE
Professeur Formateur
CNEFEI
58/60, avenue des Landes
92150 SURESNES

L'ECPN[1] : DES SITUATIONS-PROBLÈMES POUR ÉVALUER LES PRINCIPALES FONCTIONS DU NOMBRE

par Françoise DUQUESNE

SUMMARY : *The ECPN : Problems to investigate the main functions of number*

This article expounds an investigative tool of numerical abilities : the ECPN (Conceptual test for solving numerical problems). This tool is designed for children who have special learning difficulties in the area of mathematics. This one represents a complement in comparison with other tools : some measure arithmetical levels, others try to understand the numeracy processings or attempt to reveal subject's logical abilities in the acquisition of numbers. ECPN is a didactical and functional test.

It aims at releasing main concepts included in numbers used by children in arithmetic problems solving.To complete the items, the subjects have necessary recourse to mathematical properties.

The purpose of this test is to explore the child's capacity for conceptualizing different numerical functions : quantities estimate, equalization, comparison or transformation.

We have opted for qualitative study wich takes a special interest in different proceedings that the pupil makes use of when solving a task as arithmetic problems : how does he choose his proceedings, change them in process of solving, programm them, explain them, how does he control his acts ?

This test limits the technical knowledge necessary to complete the items : only small quantitites are used and the need to write is avoided, as well as the need for memorizing numerical facts. The entire test can be completed in a short time. This investigative tool results from the experience and reflections of an interdisciplinary team whith a view to providing practitioners with an assistance to pedagogical acts.*

[2]Le groupe CIMETE (Compétences et incompétences en mathématiques chez les enfants présentant des troubles exceptionnels) est composé de Corinne Bernardeau, Renée Collomp, Françoise de Barbot, Françoise Duquesne, Christiane Larrère, Marie-Hélène Marchand, Michèle Mazeau, Claire Meljac, Danielle Truscelli et Gérard Vergnaud.

* The team CIMETE (Competence and incompetence in mathematic for children with exceptional learning difficulties) is composed of Corinne Bernardeau, Renée Collomp, Françoise de Barbot, Françoise Duquesne, Christiane Larrère, Marie-Hélène Marchand, Michèle Mazeau, Claire Meljac, Danielle Truscelli et Gérard Vergnaud.

KEYS-WORDS :

Learning difficulties – Conceptual investigative test – Arithmetic skills - Numerical function – Arithmetic problem – Didactic in mathematics – Pedagogical act.

L'ENJEU DES APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES

De façon universelle, dans notre quotidien et donc dans celui des enfants, le nombre sert de jalon et de mesure pour se repérer dans l'espace comme dans le temps. Il marque notre lieu de vie et de résidence, il évalue les grandeurs physiques de notre environnement, il date tous les événements de notre vie, il rythme notre histoire. Il quantifie notre travail, notre économie, nos échanges. Mais plus encore, actuellement, une grande proportion de nos gestes de la vie courante est informatisée : faire la vaisselle, conduire sa voiture, communiquer par portable, surfer sur internet ou jouer, faire de la photo et écouter de la musique, sont toutes des actions qui peuvent se numériser. Pour comprendre le monde il devient incontournable de comprendre le nombre. Favoriser l'accès de ce levier du monde à tous les enfants représente un enjeu qui nous mobilise en tant que formatrice en didactique des mathématiques.

Or cet accès est plus ou moins refusé à certains enfants, pour différentes raisons, et ce sont bien sûr à ces sujets-là que nous nous intéressons ici.

ÉVALUER LES DIFFICULTÉS POUR AMÉLIORER L'APPRENTISSAGE D'UN MODE DE PENSÉE

Si on s'attache à comprendre en particulier les conduites des enfants en grande difficulté et si, de plus, on est face à la nécessité de planifier une remédiation, il devient important de choisir, avec toutes les conséquences que cela comporte pour l'enfant, ce sur quoi portera l'intervention. Doit-on centrer la remédiation sur le développement des mécanismes déficients ou au contraire enseigner les contenus de connaissances manquants ? Comment amener les enfants à conceptualiser les nombres entiers naturels et diminuer le nombre de ceux qui sont en situation d'échec ? Les pratiques pédagogiques courantes sont opérantes dans la plupart des cas pour apprendre aux élèves à « lire, écrire et compter », mais le sont-elles pour les aider à comprendre l'enjeu des nombres, leurs raisons d'être dans l'histoire des hommes ?

On a souvent tendance à privilégier à l'école, les apprentissages instrumentaux des premiers nombres : en leur donnant des techniques pour dénombrer une collection avec par exemple la règle « du dernier mot-nombre » dont parle K. Fuson*, des repères mnémotechniques pour passer de la représentation numérique orale à l'écriture, des astuces pour calculer, des automatismes pour effectuer les opérations, des recettes pour trouver la « bonne opération » dans un problème. Bien souvent, notre enseignement se poursuit au collège avec les mêmes principes pour l'apprentissage des nombres relatifs, rationnels et réels. Or nous savons que la pleine compréhension du concept de nombre requiert celle des autres catégories de nombres élaborés en mathématiques. Les travaux de G. Vergnaud* ont exhibé l'utilisation de ces autres nombres par les jeunes enfants, à l'école et en dehors de l'école, soulignant par là que l'appropriation du concept de nombre est un processus de longue haleine.

*1991

*1991

Nous choisissons comme perspective pour notre enseignement d'améliorer à la fois l'apprentissage de techniques données, de contenus de connaissances et celui d'un mode de pensée : les mathématiques.

L'INTRICATION DES DIVERS FACTEURS RESPONSABLES DES DIFFICULTÉS NUMÉRIQUES

Le signalement de ces difficultés est souvent assez tardif (cycle III ou même collège) et concerne plus spécifiquement les performances numériques, au niveau des opérations et des problèmes.

Lorsque ces élèves accumulent les échecs en mathématiques, et ne serait-il pas mieux de s'en préoccuper avant qu'il y ait accumulation justement, nous devons faire des investigations approfondies qui bien souvent nécessitent de « remonter » jusqu'au niveau des apprentissages fondamentaux. C'est pour cette raison que nous avons besoin de recourir à des outils d'évaluation capables de nous indiquer les secteurs fragilisés dans la construction des compétences numériques de base de ces enfants. En effet, différentes causes peuvent expliquer les sources de ces difficultés.

Le sujet et ses caractéristiques de fonctionnement

Les enfants disposent de capacités de prise et de traitement des informations plus ou moins importantes qui peuvent retentir en particulier sur les apprentissages mathématiques : la mémoire, l'attention, la planification de tâches... La présence de troubles neurologiques comme des IMC, des dyspraxies ou des dysphasies perturbent, chez les enfants qui en sont atteints, les premières acquisitions numériques, entre autres. Par exemple les activités de dénombrement sont rendues difficiles par des troubles visuo-praxiques, la manipulation des noms des nombres est parasitée par des troubles du langage, les règles de calculs ne sont pas acquises à cause de limitations de la mémoire ou la pose des opérations est échouée en lien avec des troubles de l'organisation spatiale.

Dans certains cas particuliers on aura pu diagnostiquer des dyscalculies qui correspondent principalement, chez des enfants ne présentant pas par ailleurs de retard de développement, à des troubles spécifiques des traitements numériques au niveau des symboles numériques, des algorithmes et de la planification des procédures de calcul.

Dans d'autres cas, malheureusement assez fréquents, les difficultés sont d'ordre affectif et motivationnel. En effet, la réussite en mathématiques est fortement corrélée à l'idée que l'élève se fait de lui-même et de l'école*. L'enfant peut, par exemple, avoir une image négative de lui-même en tant que « mathématicien » et mettre en place des défenses qui le conduisent à échouer plus spécifiquement dans ce domaine. Il existe différents niveaux de « blocages » plus ou moins faciles à repérer et à lever : désaffection, manque de confiance, inhibition, rejet, phobie ou même révélateur de fantasmes (la soustraction, la division, les fractions...).

* F. Boule, 2002

La relation de médiation dans la résolution d'une tâche

L'enfant peut rencontrer des obstacles liés aux règles du contrat didactique qui établissent plus ou moins implicitement la relation entre l'adulte et l'apprenant. En effet, chacun de ces protagonistes attend de l'autre des comportements qui ne sont pas nécessairement ceux demandés ni les plus appropriés à la situation d'apprentissage proposée. Par exemple, l'adulte soumet un problème à l'enfant mais celui-ci interprète et effectue la représentation qu'il s'est faite de cette tâche : il utilise tous les nombres de l'énoncé, il se sent tenu de trouver une et une seule solution, il effectue une addition car le problème fait suite à un travail sur ce thème...

De même l'adulte se fait des représentations de ses élèves, de son rôle pédagogique, des mathématiques et de leur fonctionnement, qui ne peuvent manquer de retentir sur son enseignement.

La relation entre les conceptions de l'apprenant et les concepts à enseigner

Enfin, dans tous les cas, les difficultés peuvent s'expliquer par les écarts plus ou moins importants qui existent entre les conceptions que les enfants se construisent des notions en situation et les concepts scientifiquement identifiés. Par exemple, certains enfants conçoivent les nombres principalement comme des mots sans leur attribuer de signification quantitative, d'autres pensent qu'on est obligé d'utiliser une addition (soustraction) lorsqu'il est question de « gain » (« perte ») dans une situation-problème ou encore qu'une multiplication (division) produit toujours un résultat plus grand (petit)...

Donc, pour favoriser ce passage des conceptions spécifiques des enfants aux savoirs de référence, il nous semble important, d'une part, de recourir à des outils qui, dans des situations-problèmes incitent les enfants à mobiliser ces conceptions et permettent de les révéler, d'autre part, d'analyser les concepts mathématiques eux-mêmes*.

* G. Vergnaud, 1991

Par exemple, le concept de nombre entier est caractérisé par :

- les situations-problèmes dans lesquelles le nombre est un outil pertinent pour évaluer des quantités, les mémoriser, les comparer, les égaliser, les transformer...,
- les procédures que le nombre permet de remplacer avantageusement : le dénombrement est plus économique que la correspondance terme à terme ou l'estimation globale, l'addition des nombres est plus performante que la réunion et le comptage d'objets ou de collections-témoins car le nombre évite le recours à la présence physique des quantités...,
- des définitions et des propriétés à connaître : la comptine, le système de numération, les règles de calcul, les tables d'addition...,
- un langage à acquérir : des mots-nombres (vingt...), des représentations numériques écrites avec des symboles (5, 12, 21...), des signes (+, - , =...), des termes (chiffre, unité, dizaine, ajouter, addition, somme...)
- des techniques à maîtriser : le dénombrement, la distinction entre les chiffres des dizaines et des unités, les algorithmes des opérations...,

Au final, les difficultés sont rarement dues à une seule de ces causes. Pour les comprendre, il est souvent nécessaire de faire appel à plusieurs paramètres qui proviennent des différents champs décrits précédemment et interagissent, complexifiant encore l'analyse.

LA MULTIPLICITÉ DES ASPECTS CONSTITUANT LE NOMBRE

M. Droz* souligne bien que ni les philosophes, ni les mathématiciens n'ont pu dire de manière univoque ce que sont les nombres parce qu'ils sont multiples et servent à des fins multiples. La difficulté de notre rôle éducatif et rééducatif, est de tenir compte de cette pluralité des notions qui constituent le nombre. La diversité des travaux de recherche dans le domaine numérique a permis de mettre à jour ces différents concepts impliqués dans la conceptualisation du nombre entier. * 1991

Rappelons brièvement que les aspects logiques fondamentaux du nombre ont été analysés par J. Piaget* : les structures de ***classes*** et de relations d'ordre que sont les ***séries*** conduisent l'enfant à admettre la conservation des quantités discrètes c'est-à-dire l'invariance du nombre et à comprendre la composition additive de tous les nombres. * 1941

Après ceux de P. Gréco*, les travaux de R. Gelman** ont mis l'accent sur l'importance des activités de ***dénombrement*** dans la construction du concept de nombre. * 1962 ** 1983

K. Fuson* a décrit avec précision les niveaux de développement dans l'intégration conceptuelle de la ***suite des mots-nombres***. Elle montre que le degré d'abstraction des éléments unitaires évolue d'un niveau à l'autre : partant d'une production de mots non indifférenciés récités mécaniquement et allant jusqu'à disposer d'une suite de mots-nombres individualisés pour compter à partir d'une borne, à l'endroit puis à rebours, tout en maîtrisant l'itération +1. * 1988

Dans le domaine du calcul, les études de R. S. Siegler* montrent que les enfants sont capables de mobiliser différentes ***stratégies de comptage*** pour résoudre une addition. * 1990

La compréhension de certaines ***transformations*** des quantités (ajout ou retrait) est reconnue contribuer au développement des constructions numériques*. * B. Villette, 1996

Les travaux de K. Wynn* et de S. Dehaene** montrent chez les jeunes enfants une sensibilité précoce à la représentation des quantités et aux transformations +1 et −1. Ceux de B. Villette* soulignent le rôle fondamental de la ***correspondance terme à terme*** dans l'émergence d'une arithmétique élémentaire aux alentours de 4-5 ans. * 1992 ** 1996 * 2002

D'autre part, G. Deloche et X. Seron*, M. Fayol** et F. Gaillard*** ont mené parallèlement des travaux sur les ***caractéristiques linguistiques*** des systèmes de représentation des quantités et les facteurs verbaux intervenant dans les traitements numériques. Les mots qui représentent les nombres nécessitent la maîtrise de plusieurs codes (oral, écrit ou alphabétique) et des transcodages pour passer des uns aux autres. * 1987 ** 1990 *** 2002

Dans le développement cognitif de l'enfant, tous ces accès aux divers constituants du nombre sont d'abord sans liens les uns avec les autres. Ils représentent des concepts locaux qui doivent être ***coordonnés et généralisés*** pour former le concept de nombre lui-même. Cette question complexe de l'évolution des connaissances numériques à l'aide de processus de généralisation est finement étudiée dans l'ouvrage de J. Bideaud et H. Lehalle*.

* 2002

En résumé, qu'on soit chercheur ou apprenant, le nombre est une structure générale qu'on peut interpréter selon ses besoins. Les chercheurs, à partir de la multitude des travaux rapidement évoqués précédemment, mettent en œuvre différents modèles du nombre, quelquefois convergents et quelquefois contradictoires. Quant aux enfants, ils classent, comparent, quantifient, comptent, nomment, symbolisent, transforment, composent, aux moments où ils en ont besoin. Ce sont ces pratiques et utilisations multiples du nombre que nous avons choisies d'étudier avec l'outil ECPN.

L'ECPN : UN OUTIL D'ÉVALUATION CONCEPTUELLE

Certaines démarches diagnostiques sont centrées sur les performances, d'autres sur les compétences, c'est-à-dire les capacités organisées qui sous-tendent les performances. Les évaluations centrées sur les performances ont l'avantage de permettre un constat rapide sur les possibilités adaptatives d'un enfant en milieu scolaire*. Les évaluations de compétences cherchent à expliquer la signification des performances repérées. Elles se réfèrent à des théories de l'apprentissage qui apportent chacune des informations pour interpréter les observations recueillies et permettent donc d'avoir des actions de remédiation plus efficientes que les démarches centrées sur les performances. Par exemple, l'UDN-II* s'appuie sur un modèle plutôt piagétien et le Tedi-math** sur un modèle plutôt cognitiviste. L'ECPN est un outil qui s'inscrit en complément de ceux déjà cités et qui se réfère à une théorie didactique prenant en compte les contenus des concepts***.

* J. Grégoire, 2001

* C. Meljac, G. Lemmel, 1999
** C. Van Nieuwenhoven, J. Grégoire, M. P. Noël, 2001
*** G. Vergnaud, 1991

Les praticiens, dans les faits, fondent en grande partie leurs interventions sur des contenus. Le but que se sont donnés les auteurs de l'ECPN est de prendre en compte les contenus dès la phase d'évaluation*.

* CIMETE, 1995

D'autre part, nous avons souligné la nécessité de coordonner et de généraliser les divers aspects constitutifs du nombre pour construire le concept de nombre. Or de nombreux chercheurs en pédagogie s'accordent pour dire que les résolutions de problèmes sont les activités cognitives qui favorisent le mieux la mise en place de ce processus de généralisation*. Ce sont les pratiques multiples et l'ajustement de tous les paramètres dans différentes situations qui permettent une généralisation. Donner à résoudre des problèmes en utilisant le nombre, c'est le choix fonctionnel qui distingue l'approche de l'ECPN.

* G. Brousseau, 1998, R. Douady, 1984, ou P. Meirieu, 1988

PRÉSENTATION DU TEST

Ce test, qui comporte neuf épreuves réparties en quatre blocs, a été conçu à l'usage des praticiens et des enseignants pour évaluer des fonctions fondamentales du nombre : constater, comparer, créer des écarts *etc.* Les épreuves permettent de repérer les différentes démarches que les enfants sont à même de mettre en œuvre. Les items exigent peu de connaissances et de mémoire puisque, d'une part, ne sont en jeu que des petites quantités et que, d'autre part, le recours à l'écrit ainsi que l'appel explicite à la mémorisation de faits numériques sont évités. Destiné aux enfants en très grande difficulté d'apprentissage en mathématiques, ayant ou non des troubles du langage, ce test peut être aussi administré à des enfants tout-venant. Avec un matériel peu coûteux, le test est simple et rapide à faire passer (de 10 à 30 minutes selon les enfants). Il a été conçu dans une perspective d'aide à la prise en charge pédagogique. Nous avons cherché à mieux comprendre comment un sujet contrôle ses actions en situation, comment il choisit ses stratégies, comment il les modifie en situation. Peut-il ou non expliciter ce qu'il réalise, comment planifie-t-il son action (anticipation, vérification, rappel des buts...)? Peut-il modifier ses actions en fonction des résultats obtenus (essais/erreurs)? C'est pourquoi ce protocole pousse les enfants au maximum de leurs possibilités et sollicite de leur part l'utilisation de plusieurs stratégies différentes pour une même tâche.

Pour illustrer notre approche, nous analysons ici un corpus visant l'exploration des procédures numériques d'enfants présentant différents types de difficultés en calcul.

POPULATION

Le corpus porte sur 132 enfants tout-venant issus d'école de la région parisienne répartis en cinq niveaux d'âge (4 ans 1 mois à 5 ans 0 mois ; 5 ans 1 mois à 6 ans 0 mois ; 6 ans 1 mois à 7 ans 0 mois ; 7 ans 1 mois à 8 ans 0 mois ; 8 ans 1 mois à 9 ans 0 mois) et sur 71 enfants présentant une pathologie. Parmi ces derniers, 25 enfants (de 4 ans et 6 mois à 14 ans) sont dits en consultation dans un hôpital parisien pour « échec scolaire » sans qu'aucun diagnostic précis n'ait été communiqué ; 26 enfants (de 4 ans et 6 mois à 9 ans) sont atteints d'une infirmité motrice cérébrale (IMC) ; 20 enfants (de 5 ans et 6 mois à 13 ans) sont supposés dysphasiques, (compte tenu des éléments figurant dans leur dossier). Nous n'avons pas eu comme objectif l'établissement d'étalonnage précis. Nous avons simplement tenté d'étudier qualitativement des conduites significatives.

MATÉRIEL ET CONSIGNES

La passation des épreuves est individuelle et se fait dans l'ordre exposé ci-dessous. A chaque tâche, une justification est demandée.

Évaluer et comparer

On dispose dans des boîtes devant des animaux 2 jetons pour un chat, 3 jetons pour un chien et 7 jetons pour un lapin. Si au cours d'une épreuve, l'enfant modifie la distribution des jetons devant les animaux, l'examinateur recrée la configuration d'origine avant de donner l'épreuve suivante.

Item 1a. La consigne est : « Voici le chat, voici le chien, voici le lapin. Ils ont chacun des jetons. Que peux-tu en dire ? ». Lorsque l'enfant fait une comparaison quantitative des trois ensembles numériques ou lorsqu'il les dénombre, on lui fait passer directement l'item 2. Sinon on lui fait passer l'item 1b avant l'item 2.

Item 1b. Question : « Comment a-t-on donné les jetons à chacun ? Qu'est-ce qu'on a donné à chacun ? ».

Item 2. Une fois que l'enfant a réussi l'item 1a ou passé l'item 1b, on demande : « Qui a le plus de jetons ? Comment le sais-tu ? ».

Égaliser

Le bloc constituant ***l'item 3*** regroupe trois épreuves ***3a, 3b, 3c***, pour lesquelles le problème posé est toujours le même. On attend que l'enfant donne des réponses différentes à chaque fois. Le matériel est : 2 jetons pour le chat, 3 pour le chien et 7 pour le lapin. Une boîte de réserve de 20 jetons est mise à disposition. Entre chaque manipulation de l'enfant, l'examinateur remet les jetons à leur place d'origine avant de poser la question d'après. La question posée est « Que faire pour qu'ils en aient tous pareil ? » (item 3a) ou « Que faire pour qu'il aient tous pareil, d'une autre façon ? » (items 3b et 3c).

Créer des écarts

On modifie le nombre de jetons dans les boîtes selon les épreuves, la réserve en a toujours 20.

Item 4a. L'examinateur met 3 jetons devant le chat, 0 devant le chien, et 7 devant le lapin. Il demande : « Arrange-toi pour que le chien en ait 4 de plus que le chat ».

Item 4b. Puis après avoir reformé la même distribution (3, 0 et 7), la demande est « Arrange-toi pour que le chien en ait 1 de plus que le chat ».

Item 4c. Enfin, l'examinateur modifie la disposition des jetons de manière à ce qu'il y en ait 4 devant le chat, 4 devant le chien et 7 devant le lapin. Il demande : « Arrange-toi pour que le chien en ait 3 de plus que le chat ».

Item 4d. Si l'enfant a réussi au moins une des trois épreuves 4a, 4b ou 4c l'enfant passe l'épreuve 4d, sinon il continue directement la suite du test. Pour l'épreuve 4d, l'examinateur modifie la distribution des jetons de manière à ce qu'il y ait 4 jetons devant le chat, 7 devant le chien et 7 devant le lapin. Puis il demande : « Arrange-toi pour que le lapin en ait 5 de plus que le chat ».

Ajouter et retirer

On abandonne toute référence aux animaux. Dans une situation-problème dans laquelle un état initial (des jetons dans la main de l'expérimentateur) est transformé (par ajout ou retrait) en un état final, les tâches consistent, soit à calculer l'état initial connaissant la transformation (+4) et l'état final (7) (***Item 5***), soit à trouver la transformation connaissant l'état initial (5) et l'état final (3) (***Item 6***).

CE QUE NOUS APPREND LE TEST

Le nombre pour comprendre et décrire le monde

Les tâches utilisées mettent à l'épreuve deux types d'utilisations finalisées du nombre, utiles pour comprendre et décrire le monde : le constat (items 1a et 1b) et la comparaison (item 2).

Évaluer

Dès 6 ans, plus de la moitié des tout-venant réussit d'emblée cette tâche en comparant les trois ensembles ou en les dénombrant (tableau 1). S'ils sont plus jeunes, ou bien ils ne répondent pas, ou bien ils fournissent des réponses non numériques du type « *le chat court avec le lapin* ». Tout se passe comme si, lors de l'échec, les enfants ne percevaient pas l'implicite sous-entendu numérique de la demande. Les IMC dyspraxiques et les dysphasiques ont, quant à eux, un niveau de performance à l'item 1, inférieur à celui des tout-venant de 5 ou 6 ans. Leurs échecs sont constitués par des réponses non numériques pour les dysphasiques, et par des dénombrements faux pour les IMC. Leurs réussites consistent en un dénombrement juste pour les dysphasiques et en une comparaison sans comptage pour les IMC. Quant aux sujets en échec scolaire, ils obtiennent globalement un niveau de performance analogue à celui observé chez les tout-venant après 6 ans. Mais parmi ceux qui échouent, certains (ne ressentant pas le besoin de fournir une réponse numérique précise) se contentent de dénombrer l'ensemble des jetons sans aucune distinction des trois collections.

Comparer

Le niveau de réussite à l'item 2 (tableau 1) est globalement très élevé, mais légèrement plus faible pour les enfants en échec scolaire (88%). Ces derniers échouent en raison de dénombrements faux, ou de comparaisons partielles, comme les tout-venant de 4 ans. Quel que soit le groupe, les bonnes réponses consistent soit en des dénombrements, soit en des comparaisons. Seuls les IMC ont tendance à bien répondre sans se justifier.

Tableau 1 : *Pourcentages de réussite à l'évaluation et à la comparaison.*

	tout-venant					échecs scolaires	IMC	dysphasiques
	4-5 ans	5-6 ans	6-7 ans	7-8 ans	8-9 ans			
Item 1	12,5	8,3	63,9	83,3	91,7	56	38,5	4
Item 2	91,7	100	100	97,2	100	88	96,2	100

Le nombre pour agir sur le monde

Les autres tâches testent les fonctions du nombre servant à agir sur le monde par des transformations qui, dans la vie quotidienne, constituent des réponses aux problèmes de partage, d'ordonnancement, de rangement, d'ajout, de retrait... Elles supposent, avant et durant leur déroulement, des actions d'évaluation, de comparaison et de calcul pour contrôler l'activité.

Egaliser

Pour agir, les routines de base que l'enfant est susceptible de mettre en œuvre sont l'ajout de jetons pris dans la réserve, le retrait et la compensation qui consiste à transvaser des jetons d'un ensemble à l'autre. Leur combinaison donne lieu aux schèmes, ajout-retrait, compensation-ajout, compensation-retrait, et compensation-ajout-retrait. Nous les avons regroupées dans une rubrique essai/erreur considérant par là que ces stratégies relèvent généralement du « bricolage ».

Chez les tout-venant, la réussite à l'item 3a est de 50% à 4 ans, et il est supérieur à 87% dès 5 ans (tableau 2). Tous âges confondus, le niveau des enfants en échec scolaire et dysphasiques est comparable à celui des tout-venant (proche de 90%), alors que celui des IMC est plus faible (65,4%). Chez les tout-venant, l'erreur quand elle se produit, est franche. Elle consiste en des tentatives qui débouchent sur un résultat faux : aucune des trois quantités n'est égale à l'autre. Dans les autres groupes, les erreurs peuvent aussi être dues à des égalisations partielles, inexistantes chez les tout-venant.

Tableau 2 : *Pourcentages de réussite à l'égalisation.*

tout-venant					échecs scolaires	IMC	dysphasiques
4-5 ans	5-6 ans	6-7 ans	7-8 ans	8-9 ans			
50	87,5	94,4	97,2	100	88	65,4	90

En ce qui concerne l'usage de procédures différentes pour résoudre les trois problèmes d'égalisation (schéma 1, annexe 3), les enfants en échec scolaire et les sujets dysphasiques ont un profil relativement proche des tout-venant. Ils utilisent, avec moins de variété dans les combinaisons, les routines de base d'ajout, de retrait, et de compensation, alors que les IMC ont recours à des schèmes originaux comme l'égalisation des trois ensembles à 0, ou encore le retrait de tous les jetons pour égaliser en les redistribuant un à un.

On constate que plus de 72% des enfants tout-venant (schéma 2, annexe 3) respectent l'exigence du changement de procédure, pour seulement 18% des dyspraxiques et 30 % des dysphasiques. Le champ des procédures possibles est restreint chez les IMC (il y en a 8), et encore plus chez les dysphasiques (4). Précisons que les procédures de type essai/erreur, parfois observées chez les tout-venant, sont typiques des IMC dyspraxiques.

Créer des écarts

Une autre façon d'utiliser le nombre pour transformer le monde consiste à créer des écarts entre deux collections. Pour l'item 4a, le niveau de performance varie d'un groupe de sujets à l'autre (tableau 3). Les IMC dyspraxiques et les dysphasiques ont respectivement des réussites de 3,9% et 10%, ce qui est à peine supérieur à celle des tout-venant avant 6 ans. Les enfants en échec scolaire ont un taux comparable à celui observé chez les tout-venant autour de 7 ans (48%).

Tableau 3 : *Pourcentages de réussite à l'item 4a.*

tout-venant					échecs scolaires	IMC	dysphasiques
4-5 ans	5-6 ans	6-7 ans	7-8 ans	8-9 ans			
0	0	36,1	61,1	75	48	3,9	10

Chez les tout-venant, le développement est partiellement ordonné. Avant 5 ans, la plupart des enfants emploie exclusivement, pour l'ensemble des problèmes de l'item 4, des actions qui satisfont des relations non pertinentes (n étant l'écart imposé : « ...avoir n nombre de plus », « ...avoir n », ou « ...avoir plus »). Entre 5 et 6 ans apparaissent les premières conduites heuristiques, comme ajouter n au référent ou au référé. Les procédures heuristiques peuvent déboucher sur un résultat juste, dans certaines configurations numériques, lorsqu'elles sont appliquées aux bons ensembles. De 6 à 7 ans, deux voies distinctes peuvent être empruntées.

- L'enfant utilise de manière quasi exclusive la même heuristique y compris lorsque celle-ci s'avère inadaptée aux valeurs numériques (fréquence de la routine d'ajout chez un même enfant).

- L'enfant alterne des heuristiques avec des algorithmes : procédures comme le calcul mental, qui sont pertinentes quelles que soient les valeurs numériques.
- Enfin, à la dernière étape, le recours aux algorithmes devient quasi systématique. La routine de l'ajout devient une instance particulière de l'algorithme égalisation-ajout, valide pour l'item 4c.

Les enfants en très grande difficulté présentent des particularités dans leurs démarches, les différenciant des tout-venant. Ainsi, parmi des réponses aux items 4c et 4d, on trouve des conduites atypiques chez les enfants en échec scolaire et les dysphasiques (le retrait ou une série d'actions particulières à chaque enfant). Par ailleurs, chez les enfants en échec scolaire et les IMC, il existe quelques profils absents chez les tout-venant comme celui consistant à recourir à des algorithmes (tel l'égalisation suivi de l'ajout) avec, malgré tout, une persistance de la difficulté à sélectionner les arguments pertinents (l'ajout n'étant pas nécessairement appliqué au bon référé). Enfin, contrairement aux autres enfants qui sont en échec scolaire ou tout-venant, les IMC et dysphasiques ont en commun une particularité développementale. Ils semblent ne suivre qu'une seule voie, celle qui consiste à recourir de façon répétée à la même heuristique.

Calculer

Le calcul prend du sens dans les problèmes additifs où l'enfant a besoin de trouver une inconnue*, comme pour les items 5 et 6. Pour les tout-venant (tous âges confondus), les enfants en échec scolaire, et les dysphasiques, la réussite est supérieure à 62% (tableau 4). Le calcul de l'état initial (item 5) s'avère plus facile ou de difficulté égale au calcul de la transformation (item 6). Pour les IMC, la réussite est globalement plus faible que pour les autres groupes ; on observe une hiérarchie de difficulté inverse : le calcul de la transformation est plus facile (46,2%) que le calcul de l'état initial (3,9%). En ce qui concerne les procédures utilisées, les dysphasiques et les IMC dyspraxiques ont des profils proches bien que leurs niveaux de performance diffèrent. Ils sont les seuls à faire l'erreur qui consiste à ajouter l'état final et la transformation pour calculer l'état initial. Les sujets IMC ont rarement eu recours au calcul mental et n'améliorent pas leurs performances en regardant les jetons de l'état final.

* Vergnaud, 1981

Tableau 4 : *Pourcentages de réussite au calcul.*

	Tout-venant					échecs Scolaires	IMC	dysphasiques
	4-5 ans	5-6 ans	6-7 ans	7-8 ans	8-9 ans			
Item 5	58,3	75	80,6	88,9	100	80	3,9	70
Item 6	4,2	50	80,6	86,1	100	60	46,2	70

RAPPROCHER DIVERSES INTERPRÉTATIONS DES DIFFICULTÉS OBSERVÉES

En premier lieu, nous pensons qu'une difficulté qui touche à un mécanisme, comme l'attention ou la mémoire, n'exclut pas l'existence, sur le plan conceptuel, d'une représentation erronée. Les deux modalités explicatives, en termes de mécanismes ou de concepts, ne sont pas exclusives l'une de l'autre, elles se complètent.

Or ce test nous permet, assez rapidement, de distinguer à la fois une difficulté que l'on peut attribuer à des limites mécaniques, et celles qui relèvent d'un défaut de conceptualisation.

- Par exemple, les erreurs de comptage des IMC, évoquées notamment pour l'évaluation, la comparaison ou encore la création des écarts, peuvent naturellement s'expliquer par la gêne qu'éprouvent les IMC dyspraxiques à coordonner les aspects oculo moteurs.
- De même, on peut interpréter chez les IMC et dysphasiques les difficultés constatées à varier leurs conduites lors de la répétition de la tâche d'égalisation ou dans la création des écarts comme un manque de flexibilité du contrôleur exécutif. Lors du passage d'un essai à l'autre, avant l'activation d'une nouvelle procédure, le contrôleur exécutif ne parviendrait pas à inhiber la procédure qui vient d'être utilisée, pour réinitialiser la mémoire de travail.

Cependant, ce profil qui consiste à réutiliser quasi-exclusivement la même heuristique en dépit des nécessités dues aux changements de conditions numériques, est aussi présent chez des enfants tout-venant. Dans le cadre théorique de Vergnaud*, qui peut s'appliquer également aux différentes populations étudiées, il s'agirait d'un mauvais ajustement du domaine de validité d'une procédure dont la portée est surgénéralisée à des situations-problèmes qui n'en justifient pas l'usage. *1991

En deuxième lieu, la réussite ou non aux épreuves de l'ECPN nous permet d'en inférer la maturité conceptuelle de l'enfant en dépit de la spécificité de son trouble.

Par exemple, lors de la création d'un écart, une erreur du type « faire en sorte que le référent en ait plus que le référé », dénote une prise en compte de la relation d'ordre alors qu'elle est ignorée dans une erreur du type « ajouter *n* ».

De même, une résolution par un calcul mental pertinent, même avec une erreur de comptage, témoigne d'une anticipation plus grande qu'une réussite par tâtonnements successifs.

Enfin, troisième point, la mise en relation des activités relevées aux différentes tâches, révèle les potentialités de développement, c'est-à-dire ce sur quoi le praticien va pouvoir s'appuyer pour agir au niveau d'une remédiation. On sait par exemple que l'enfant, qui utilise spontanément la soustraction pour égaliser ou pour calculer un ajout alors qu'il ne le fait pas pour créer un écart, peut progresser dans un proche avenir en étendant la portée du schème de soustraction.

L'ECPN UN RÉVÉLATEUR DE COMPÉTENCES

Ainsi, L'ECPN donne à voir différentes manières d'échouer ou de réussir dont on déduit des stratégies d'aide pour améliorer l'utilisation du nombre d'un enfant, c'est-à-dire pour étendre l'ensemble des situations dans lesquelles le nombre sera pour lui un outil pertinent.

Au delà des différences de contraintes et de ressources dans lesquelles évoluent les enfants tout-venant, en échec scolaire, IMC dyspraxiques, dysphasiques les principes fondamentaux de l'assimilation-accommodation sont pour tous les mêmes.

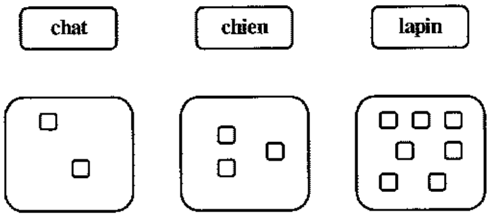
BIBLIOGRAPHIE

- Bideaud J., Meljac c., Fisher J.P. (1991). *Les chemins du nombre.* Lille : Presses Universitaires de Lille.
- Bideaud J. (1997).Du bébé à l'enfant de Piaget : quelle construction du nombre ? In *Psychologie française* n° 42.
- Bideaud J., Lehalle H. (2002). *Le développement des activités numériques chez l'enfant.* Paris : Hermès.
- Boule F. (2002). Les difficultés rencontrées en mathématiques. In Poje-Cretien J., Seknadje-Askenazi J. (2002). *Elèves en difficulté : les aides spécialisées à dominante pédagogique.* Suresnes : Editions du Cnefei. p.67-73.
- Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.
- Charron C., Duquesne F., Marchand M.-H., Meljac C. (2001). L'évaluation des conduites numériques des enfants en grande difficulté. In Van Hout A., Meljac C., *Les troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant.* Paris : Masson. p.336-346.
- Chichignoud M.P. (1986). Le développement du concept de nombre chez le jeune enfant. In *GRAND N n°36,* CRDP de Grenoble.
- Cimete. (1995). Compétences et incompétences en arithmétique : une aide au diagnostic et à l'action pédagogique particulièrement destinée aux enfants affectés de difficultés sévères d'apprentissage. In *ANAE,* Hors série Dyscalculies p. 58-63.
- Dehaene S. (1996). *La bosse des maths.* Paris : O. Jacob.
- Deloche G., Seron X., In Fayol M. (1990). *L'enfant et le nombre.* Neufchâtel-Paris : Delachaux-Niestlé.
- Douady R. (1984). *Jeu de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse, Université Paris VII.
- Droz M. (1991). Théories et méthodes : approches critiques. In Bideaud J., Meljac C., Fisher J.P. *Les chemins du nombre.* Lille : Presses Universitaires de Lille. p. 285-302.
- Duquesne F. (1999). Compétences arithmétiques : une aide au diagnostic et à l'action pédagogique. In *Rééducation orthophonique,* Les activités logico-mathématiques, p. 81-90.

– Duquesne F. (2002). *Apprendre à raisonner à l'école et au collège.* Suresnes : Éditions du Cnefei.
– Fayol M. (1990). *L'enfant et le nombre.* Neufchâtel-Paris : Delachaux-Niestlé.
– Fisher J.P. (1991). *Connaissances procédurales et déclaratives dans les apprentissages numériques élémentaires.* Nancy : Presses Universitaires de Nancy.
– Fuson K. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In Bideaud J., – Meljac C., Fisher J.P. *Les chemins du nombre.* Lille : Presses Universitaires de Lille, p. 159-179.
– Fuson K. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York : Springer Verlag.
– Gaillard F., Willadino-Braga L. (2001). Calcul et langage dans le développement et les troubles d'apprentissage. In Van Hout A., Meljac C., *Les troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant.* Paris : Masson, p.179-200.
– Gelman R. (1983). Les bébés et le calcul. *La recherche* n°14.
– Gregoire J. (2001). Evaluer les troubles du calcul. In Van Hout A., Meljac C., *Les troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant.* Paris : Masson, p.309-329.
– Greco P. (1962). Quantité et quotité. In Greco P., Morf A., (eds), *Structures numériques élémentaires* (Etudes d'épistémologie génétique, vol. XIII).Paris, Presses universitaires de France.
– Meljac C. (1979). *Décrire , agir et compter.* Paris : P.U.F.
– Meljac C., Lemmel G. (1999). *Batterie UDN-II : Manuel d'utilisation et matériel.* Paris : ECPA.
– Meirieu P. (1988). *Apprendre... oui mais comment.* Paris : ESF.
– Piaget J. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant.* Neufchâtel-Paris : Delachaux et Niestlé.
– Piaget J. (1967). La construction du nombre naturel. In *Logique et connaissance scientifique.* Paris : Gallimard.
– Siegler R. S . (1990). How content knowledge, strategies, and individual differences to produce strategy choices. In W. Schneider F. E. Weinert (eds). *Interaction among aptitudes, strategies, and knowledge in cognitive performance.* New-York : Springer Verlag.
– Van Hout A., Meljac C. (2001). *Les troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant.* Paris : Masson.
– Van Nieuwenhoven C., Gregoire J., Noel M.P. (2001). *TEDI-MATH : Manuel.* Paris : ECPA .
– Vergnaud G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne : Peter Lang.
– Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique Mathématique,* 10, 2-3, Grenoble : La Pensée Sauvage.
– Vergnaud G. (1991). L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine. In Bideaud J., Meljac C., Fisher J.P., *Les chemins du nombre,* Presses Universitaires de Lille, p. 272-282.
– Villette B. (1996). *Le développement de la quantification chez l'enfant.* Paris : Presses universitaires du septentrion.
– Villette B. (2002). Processus de quantification chez le jeune enfant : peut-on parler d'une arithmétique précoce ? In Bideaud, J., Lehalle, H., *Le développement des activités numériques chez l'enfant.* Paris : Hermès. p. 81-101.
– Wynn K. (1992). Addition and substraction by human infants. *Nature,* 358.

Annexe 1

LE TEST ECPN : Épreuves Conceptuelles de résolution de Problèmes Numériques
Situation initiale
On constitue devant l'enfant, trois tas de jetons qui sont attribués chacun à l'une des trois figurines suivantes : un chat, un chien, un lapin, selon la répartition suivante :



Une boite de réserve de 20 jetons est mise à la disposition de l'enfant, sans ostentation. Tous les jetons sont identiques. Il est important de faire tous les exercices, y compris en cas d'échec de certains (sauf ceux indiqués dans le texte).

Item 1 : Évaluer des quantités et communiquer son jugement

Item 1a : On demande à l'enfant de décrire la situation :
« ***Voici le chat, voici le chien, voici le lapin, ils ont chacun des jetons. Que peut-on en dire ?*** »
Après une première réponse spontanée non numérique, on fait passer l'épreuve suivante :
Item 1b :
« ***Comment a-t-on donné les jetons à chacun ?*** » ou « ***Qu'est ce qu'on a donné à chacun ?*** »

Item 2 : Comparer des quantités

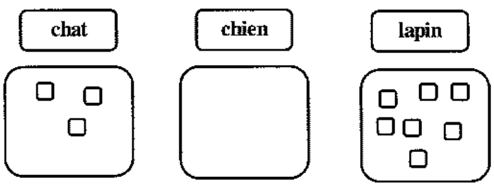
A partir de la situation initiale, on demande à l'enfant : « ***Qui a le plus de jetons ? Comment le sais-tu ?*** »

Item 3 : Égaliser des collections

Revenir à la situation initiale si nécessaire et demander à l'enfant : « ***Que faire pour qu'ils en aient tous pareil ?*** »
La même consigne est répétée trois fois de suite (***items 3a, 3b, 3c***) en incitant l'enfant à trouver à chaque essai des procédures différentes.
Revenir à la situation initiale entre chaque manipulation et chaque consigne. Ne pas suggérer directement qu'il faut procéder par soustraction.

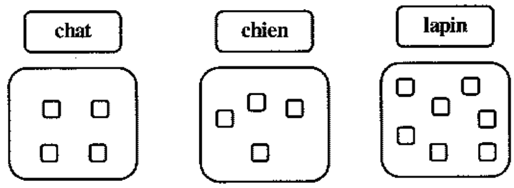
Item 4 : Créer des écarts

Item 4a : On modifie la distribution des jetons placés devant chaque figurine et on demande : « ***Arrange-toi pour que le chien en ait 4 de plus que le chat*** »

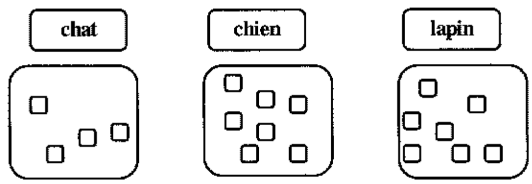


Item 4b : Avec la même distribution des jetons on demande : « ***Arrange-toi pour que le chien en ait 1 de plus que le chat*** »

Item 4c : On modifie à nouveau la distribution des jetons et on demande : « ***Arrange-toi pour que le chien en ait 3 de plus que le chat*** »



Item 4d : On modifie la distribution des jetons. Il s'agit de la situation finale de l'exercice précédent. On demande : « ***Arrange-toi pour que le lapin en ait 5 de plus que le chat*** »



Item 5 : Rechercher l'état initial

On abandonne toute référence aux figurines.
Dans la main fermée, l'examinateur retient 3 jetons. D'emblée il dit à l'enfant : « ***J'ai des jetons cachés dans ma main, fais bien attention et compte avec moi, il faudra que tu trouves combien j'en ai*** ». L'examinateur ajoute ostensiblement 4 jetons dans sa main fermée en proposant à l'enfant de les dénombrer en même temps que lui.

Main fermée : On dit « ***J'en ai maintenant 7, j'en avais combien au début ?*** »

Main ouverte : En cas d'échec, l'examinateur ouvre sa main et fait dénombrer le tout à l'enfant en lui laissant le choix de la stratégie de dénombrement. Si l'enfant se trompe, on l'aide et on rectifie le dénombrement. On redemande alors : « ***J'en avais combien au début, quand ma main était fermée ?*** »

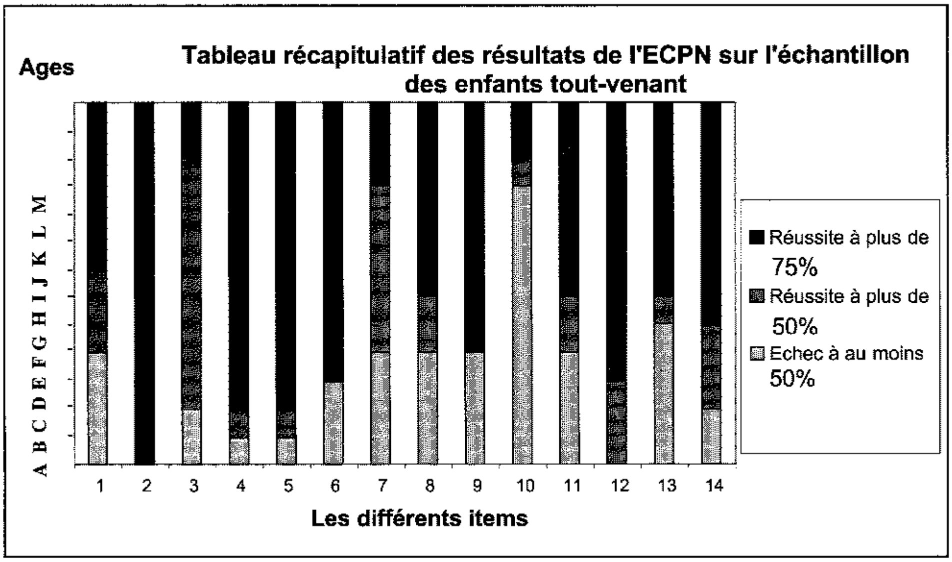
Item 6 : Effectuer une transformation négative

L'examinateur prend 5 jetons dans sa main en les montrant et en les dénombrant avec l'enfant. Puis il en enlève 2 en cachette de l'enfant.

Main fermée : Il présente ensuite sa main fermée avec les 3 jetons restants et déclare : « ***J'ai fait quelque chose que tu n'as pas vu et maintenant j'ai 3 jetons dans la main, qu'est ce que j'ai fait ?*** ». Si l'enfant ne donne pas une réponse quantifiée, l'y inciter « ***combien... comment le sais tu ?*** »

Main ouverte : En cas d'échec, l'examinateur renouvelle la question en présentant sa main ouverte.

Annexe 2

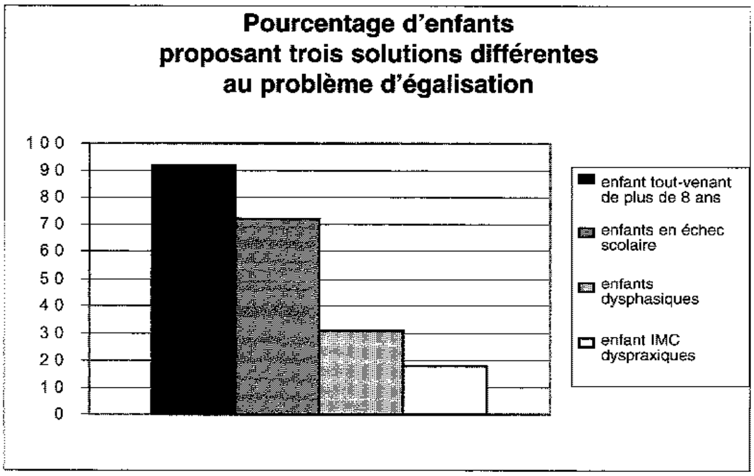


Légende

Les différents items	Les âges
1 --- Item 1	A --- 4 ans MS
2 --- Item 2a	B --- 4 ans 6 MS
3 --- Item 2b avec justification numérique	C --- 5 ans GS
4 --- Item 3a avec au moins 1 solution	D --- 5 ans 6 GS
5 --- Item 3b avec 2 solutions distinctes	E --- 6 ans CP
6 --- Item 3c avec 3 solutions distinctes	F --- 6 ans 6 CP
7 --- Item 4a «4de plus que»	G --- 6 ans 6 CE1
8 --- Item 4b «1 de plus que»	H --- 7 ans CP
9 --- Item 4c «3 de plus que»	I --- 7 ans CE1
10 --- Item 4d «5 de plus que»	J --- 7 ans 6 CE1
11 --- Item 5 main fermée	K --- 8 ans CE2
12 --- Item 5 avec aide main ouverte	L --- 9 ans
13 --- Item 6 main fermée	
14 --- Item 6 avec aide main ouverte	

Annexe 3

Schéma 1



Schémas 2