Glossa n°120 (44-74), 2017

Avec Lucie, sur le chemin des écoliers… *(Ou comment agrandir le domaine de validité des schèmes pertinents)*

Le chemin des écoliers n'est pas toujours celui qui mène droit à l'école, on le sait bien.
L'important est de pouvoir s'y retrouver et d'arriver à bon port, sans avoir rencontré trop de loups.
Claire Meljac

Alain MENISSIER

orthophoniste
DEA de linguistique et sémiotique, maîtrise de Psychologie clinique, 1 Place Aragon, 70100 Arc les Gray
alain.menissier@wanadoo.fr

ISSN 2117-7155

Résumé :

Lucie, âgée de 12 ans, consulte sur la demande de l'enseignant pour un échec électif en mathématiques. Si le bilan vise à établir (ou à infirmer) un diagnostic précis, il permet aussi de déterminer les objectifs de la rééducation et de cibler une approche réaliste de la prise en charge. Le clinicien se doit donc de faire la part entre les conceptions erronées et/ou parcellaires des acquis de la sphère mathématique. La remédiation développera ainsi une mise en contexte des situations problèmes afin de travailler sur la prise de décision logique et la pertinence entre schèmes dangereux et schèmes pertinents. Pour cela, il nous faudra revenir sur quelques principes de base :

- Savoir reconnaître et différencier les schèmes pertinents et les schèmes dangereux
- Mettre l'enfant en situation de réussir (recherche et mobilisation des schèmes pertinents)
- Ne pas hésiter à suivre parfois « *le chemin des écoliers* »
- Consolider l'application du schème pertinent : l'enfant construit et élabore sa propre règle de fonctionnement.

Pour rétablir un lien entre stratégies et signification, nous ne devons pas oublier que chaque contexte de situation-problème requiert une spécification des schèmes : en d'autres termes, le clinicien doit tenir compte d'une reconstruction partielle des schèmes selon les contraintes propres à chaque situation particularisée et selon le niveau des significations attribuées à celle-ci.

Mots clés : bilan, cognition mathématique, remédiation, schèmes.

With Lucy, on the way to school… *(Or how to expand the validity domain of relevant schemes)*

Summary:

Lucy, aged 12, is referred by her teacher because of a failed elective math exam. If the evaluation aims at establishing (or overruling) a specific diagnosis, it will also enable the clinician to determine the remedial objectives and to choose a realistic approach regarding of remediation. The clinician must distinguish between false or incomplete conceptions of mathematical acquired knowledge. Remediation will thus put in context problem situations in order to work on logical decision making and pertinence between dangerous schemes and relevant schemes.

To this effect, we need to recall some guiding principles:

- Being able to recognize and differentiate relevant schemes and dangerous schemes
- Facilitating the child's success (search and mobilization of relevant schemes)
- Not hesitating to sometimes take the long way round
- Consolidating the relevant scheme application: the child builds and develops his own operating rule.

To re-establish a link between strategies and meaning, we must not forget that each problem situation context needs a specification of schemes: in other words, the clinician must take into account a partial reconstruction of the schemes according to constraints specific to each customized situation and according to the level of meaning allotted to it.

Key words: assessment, mathematical cognition, remediation, schemes.

--------- INTRODUCTION ---

Le praticien qui entreprend avec un enfant ou un adolescent un travail de rééducation des troubles de la cognition mathématique ne peut ignorer les différents domaines où interviennent les concepts de nombre et de calcul. Car l'accès à la numération, la compréhension du système décimal ou la maîtrise des algorithmes de calcul ne sauraient suffire pour étayer une progression dans le domaine de la cognition mathématique. Comprendre le nombre n'est pas suffisant, il faut savoir l'utiliser et étendre le champ d'un calcul à des situations de problèmes plus élaborées. Ainsi résoudre un problème nécessite des compétences numériques permettant de pouvoir effectuer des compositions et des décompositions, sans oublier la permanence de la réversibilité à travers les contraintes de situation. Même si le praticien se doit d'utiliser un matériel qui offre à l'enfant d'être au plus près de son potentiel cognitif, son premier outil reste avant tout son approche méthodologique du trouble.

1. Précisions méthodologiques

Comme notre étude de cas fait référence à des concepts issus de la psychologie développementale, et notamment de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991), nous avons choisi de préciser dans un premier temps les concepts d'invariant et de schème.

a. La notion d'invariant

Parler du rôle de l'invariant comme outil méthodologique dans l'acte de rééducation, c'est bien sûr parler de méthodologie (Ménissier, 1997). Et parler de méthodologie, c'est s'intéresser en premier au lien unissant la théorie et la pratique. De la remarque d'Einstein « *c'est la théorie qui détermine ce que nous observons* » nous inférerons que c'est la théorie qui détermine ce que nous pouvons faire, ce que nous pratiquons. Si une théorie peut se définir comme une explication dont les faits s'imbriquent, alors la théorie donne un sens aux faits, elle permet d'organiser des éléments qui, au départ, semblent désorganisés. Mais le chemin (par sa racine étymologique *meta-hodos* → à côté du chemin) s'organise en double sens :

- Regard sur le chemin suivi, ce qui est constatif
- Regard sur le chemin à suivre, ce qui est normatif.

Ce chemin bidirectionnel reste assez souvent chaotique, et le bon sens, que l'on appelle aussi le sens commun, ne suffit pas. Nous avons besoin de modèles, et ce que l'on demande à un modèle, c'est de fonctionner dans le domaine de définition que l'on se fixe. Même si l'élaboration d'un modèle d'une réalité donnée reste du bricolage, ce bricolage ne peut s'effectuer qu'avec de bons outils. En d'autres termes, nous ne saurions parler de signifiant en l'absence de toute conceptualisation. L'activité conceptuelle a donc nécessairement des aspects repérables au plan des signifiants, mais cette activité conceptuelle implique également des aspects qui se situent au plan des signifiés et qui ne sont pas directement observables. Le primat de l'action du sujet nécessite alors de contrôler le contexte situationnel afin de distinguer les différentes composantes du signifié telles qu'invariants, inférences, règles d'action, prédictions… « *L'interaction du sujet avec le réel est essentielle puisque c'est dans cette interaction que le sujet forme et éprouve ses représentations et conceptions, en même temps que celles-ci sont responsables de la manière dont il agit et dont il règle son action* »

(Vergnaud, 1985). L'activité au plan du signifié est donc en rapport avec l'action de l'enfant lorsque celui-ci se confronte avec le réel, rencontre le réel. Les actions de l'enfant permettent donc de repérer de multiples aspects du signifié.

La représentation mentale est ainsi constituée d'éléments stables sous les opérations symboliques, les opérations sémiotiques nécessaires à l'action ; ces éléments doivent de même refléter des éléments de la réalité également stables, quelles que soient les transformations qu'accomplit l'enfant. Le *concept d'invariant* exprime cette idée de stabilité relative à un ensemble de transformations, à un ensemble de variations : la recherche de l'invariant, c'est avant tout la recherche du sens.

Catégories d'invariants

1. **Invariants quantitatifs :**
   - permettent d'associer à un objet une valeur sur une échelle ordonnée (déterminés par une relation unaire)
2. **Invariants qualitatifs :**
   - permettent d'associer à un objet une valeur sur une échelle simplement catégorielle (relations unaires)
3. **Invariants relationnels et de classifications :**
   - Etablissent des relations unaires, ternaires, quaternaires… entre les objets et les classes d'objets.
   - Caractérisent l'activité de traitement cognitif mise en œuvre par l'enfant.

Figure 1. Les catégories d'invariants

Il existe au moins trois grandes catégories d'invariants (voir figure 1) :

1. Les invariants quantitatifs :

Ces invariants permettent d'associer à un objet une valeur sur une échelle ordonnée. Considérons la phrase « *Il y a trois pommes rouges sur la branche* ». *Trois* est un signifiant qui appartient à l'échelle ordonnée des nombres entiers dans le système numérique à base 10 et se réfère à l'invariance quantitative du concept de nombre.

2. Les invariants qualitatifs :

Ceux-ci permettent d'associer à un objet une valeur sur une échelle simplement catégorielle. Dans notre exemple, [*ceci est une pomme, chaque pomme est rouge*] sont des descripteurs qualitatifs qui s'intègrent en classe d'équivalence, comme par exemple, la classe des fruits ou celle des objets de couleur rouge.

3. Les invariants relationnels et classificatoires :

Vergnaud les appelle « joliment » des « *théorèmes-en-acte* », ce qui montre bien l'importance du lien théorie-pratique. Il faut les imaginer comme des canevas de l'action, des associations de schèmes. Ces invariants établissent des relations binaires, ternaires, ou quaternaires entre les objets et les classes d'objets (*pommes sur la branche...)*. De plus, ils caractérisent l'activité de traitement cognitif mise en œuvre par l'enfant.

b. La notion de schème

C'est Piaget (1950) qui a introduit les concepts épistémologiques de schème et d'invariant. Le schème d'une action peut se définir comme l'ensemble structuré des caractères généralisables de cette action, c'est-à-dire de ceux qui permettent de répéter la même action ou de l'appliquer à de nouveaux contenus. Un schème est donc un mode de réactions susceptibles de se reproduire et surtout d'être généralisées. Il construit de ce fait les différents invariants, mais comme le dit Vergnaud (1987), le schème n'est pas seulement un invariant pour l'épistémologue, c'est aussi pour le sujet une totalité dynamique composée d'invariants qui lui permet de reconnaître les conditions des règles contenues dans le schème et de moduler ses choix en fonction des variables de situation. Car ce sont les invariants qui permettent aux schèmes de trouver les conditions de leur fonctionnement, et les règles d'actions engendrent au plus près la séquence des actions du sujet. Mais ces règles et ces procédures d'actions n'aboutiraient à rien si elles ne s'appuyaient pas sur la représentation du réel. La fonction de la connaissance est bien de permettre au sujet d'opérer sur le réel et pour cela, il lui faudra se représenter le réel le mieux possible, avec notamment la construction de relations et de catégories.

Ainsi, d'un point de vue méthodologique, nous voyons que les objets ont des propriétés soit qualitatives, soit quantitatives, et d'autre part que les objets entretiennent différents types de relations avec les autres objets.

Ces objets subissent des transformations qui peuvent être dues aux activités de l'enfant ou provenir de changements naturels. Toute méthode consiste alors à définir ces différentes classes de transformations et les invariants qualitatifs, quantitatifs et relationnels qui sont associés à ces classes de transformations. L'élaboration des invariants assure à la représentation mentale son efficacité et lui permet de remplir sa double fonction :

- refléter le plus fidèlement possible la réalité,
- pouvoir se prêter à un calcul relationnel.

Alors nous dirons de cette représentation qu'elle est *opératoire*.

2. Une étude de cas - Lucie et ses difficultés en mathématiques

Lucie, âgée de 12 ans 9 mois, consulte en orthophonie sur la demande du professeur de mathématiques pour un échec électif dans cette discipline. Actuellement scolarisée au Collège en 4^{e}, Lucie est en difficulté dans toute la sphère de la cognition mathématique. Aucune indication n'a été proposée auparavant, notamment au cours du Primaire, bien que la maman se soit inquiétée des difficultés de sa fille à acquérir les premières notions arithmétiques. Au cours de l'anamnèse, la maman ne signale aucune difficulté au cours de la première enfance, ni dans l'acquisition du langage, ni dans le développement moteur. Il n'y a donc eu aucun bilan ni aucune prise en charge antérieure. Mais Lucie est née en fin d'année civile et les enseignants successifs ont toujours noté un manque de maturité.

Lucie est une enfant unique et ses parents ont divorcé lorsqu'elle avait 8 ans. Nous n'aurons qu'une occasion de voir le père et durant la prise en charge, de nombreux rendez-vous seront annulés, lorsque celui-ci se devait d'accompagner sa fille.

a. Evaluation : bilan de la dyscalculie et des troubles du raisonnement logico-mathématique :

Aux résultats du ZAREKI-R [1] (Von Aster, adaptation française Delatollas, 2006), Lucie obtient un score de 116,5 (sur 163), ce qui la situe dans le 1er décile des enfants de 10 ans à 10 ans 11 mois (cf. tableau en annexe 1). L'indice de dispersion indique la taille de l'écart à la moyenne des notes : l'écart type de 1,42 (σ) calculé sur la somme de tous ses résultats confirme les difficultés de Lucie, mais si le test ZAREKI-R permet une première approche quantitative pour visualiser certaines difficultés, le choix des épreuves ainsi que le nombre restreint d'items au sein de ces épreuves oblige le clinicien à affiner son bilan en présentant des épreuves complémentaires. A cette fin, nous n'hésitons pas à nous ranger dans une perspective proche de la méthode clinique piagétienne afin d'appréhender qualitativement les processus de pensée de Lucie. Nous utilisons ainsi quelques épreuves complémentaires issues d'une étude non publiée (Ménissier ; 2003b), mais aussi des épreuves qualitatives décrites antérieurement (Ménissier ; 2002b, 2003a, 2007a, 2011).

Dénombrement : la correspondance pointage-énumération n'est pas toujours coordonnée. Lucie se trompe ainsi dans le dénombrement de 37 jetons donnés en aléatoire par le fait d'une mauvaise gestion entre les jetons déjà comptés et les jetons encore à compter.

Comptage : au niveau du comptage écrit, nous testons la connaissance du système décimal : Lucie commet quelques erreurs de type syntaxique dans le passage des mille (et de ses puissances de 10) et dans la valeur positionnelle des chiffres dans le nombre : [*écrire les trois nombres suivant 1100 → 11001 – 11002 – 11003 ; écrire les trois nombres précédant 1900 → 19197 – 19198 – 19199].*

Le comptage oral est maîtrisé sur les items du ZAREKI-R (note de 4/4), mais dans une épreuve complémentaire, on relève des erreurs dans la gestion des tâches dans le comptage à rebours avec borne d'arrêt (Lucie continue son comptage). Par exemple, dans l'*habileté de compter de y à x (de 78 à 65)*, Lucie oublie de s'arrêter à 65, par effet d'une charge cognitive mobilisant l'activité de décrémentation au détriment du maintien en mémoire du numéral verbal comme borne d'arrêt.

Transcodage numérique : la dictée de nombres reste difficile, de même que la lecture de nombres en chiffres. Ainsi le transcodage d'un nombre verbal écrit vers un numéral arabe reste difficile sur de nombreux numéraux : Lucie fait des erreurs de types a-contextuel (transcodage de chaque mot-nombre par un chiffre) et syntaxique sur le traitement des numéraux présentant des dizaines complexes (de type *trois mille quatre cent soixante-dix-huit → 3 4178)*. La représentation analogique d'un numéral arabe révèle aussi des erreurs sur la représentation des nombres incluant des dizaines complexes, avec un traitement qui reste séquentiel (*trois cent quatre-vingt-douze → 3 plaques de 100, 8 bûchettes de 10 et 12 cubes)*.

[1] Lucie a été vue en bilan en septembre 2013 et nous ne disposions pas alors d'un test comme le Tedi-Math Grands

<u>Ligne numérique mentale</u> : Lucie a du mal à appréhender les repères numériques demandés tant en estimation qu'en production de longueur. Dans une épreuve complémentaire (Chillier, 2002), l'échelle de rapport 20 n'est pas mieux réussie que celle de 100. En revanche, les lignes marquées du subtest du Zareki-R sont réussies (note de 12/12) mais on note un semi-échec sur les lignes vierges, avec une note de 6,5/12 [total de 18,5/24].

<u>Estimation qualitative de quantités en contexte</u> : la note au ZAREKI-R est de 5 sur 10. Lucie semble ne pas vouloir assumer de décision logique en contexte, sept réponses *moyen* sont données pour trois réponses *beaucoup (*aucune réponse *peu).*

<u>Arithmétique élémentaire</u> (Ménissier , 2003a) : dans les calculs additifs, le répertoire stratégique se déploie autour de quatre procédures. Le mode de résolution principal s'effectue principalement par surcomptage additif (avec commutativité acquise) et décomptage soustractif (si l'écart entre les deux valeurs est inférieur à 5), et quelquefois par le passage par la base 10 ou par connaissance du fait arithmétique (notamment les doubles). On note quelques procédures analogiques, de type calcul du même écart (par ex*, calculer 10 –7 pour l'item 11 – 8).* Cette procédure analogique engendre cependant une charge cognitive importante pour Lucie (« *8 + 4, je fais 2, je regarde le résultat, pis j'ajoute 2… »* mais Lucie ne se rappelle plus ni l'item, ni le résultat). Les faits arithmétiques se limitent le plus souvent aux connaissances des doubles mais il n'y a pas d'extension au calcul inverse (*4 – 2 est résolu par - 1, - 1 et non par la connaissance de 2 + 2 ; 12 – 6 est échoué : « ça ne me vient pas »).* L'item addition du subtest calcul mental (Zareki-R) est néanmoins réussi (note de 14/16), avec un temps de résolution très long, alors que l'item soustraction est largement échoué (note de 4/16).

<u>Calculs multiplicatifs</u> (Ménissier, 2007b) : Lucie a recours à une recherche procédurale maximale par le fait d'une insuffisance des faits déclaratifs : l'accès au mode de résolution de type déclaratif est loin d'être automatisé, il y a donc beaucoup de méconnaissances des items des tables de multiplication. On note 4 erreurs (1/2 de réussite) sur la reconnaissance de résultats de produits dans les faits arithmétiques multiplicatifs. De même, la connaissance déclarative reste floue avec des écarts importants (*27 donné comme le produit de 9* x *6, ou 32, produit de 7* x *3).* Nous pouvons comparer notre investigation aux résultats obtenus à l'épreuve multiplication du subtest calcul mental oral (Zareki-R) : celle-ci est réussie avec une note de 10/12, mais le test ne propose que des faits inférieurs à 20 qui ont été résolus par Lucie en développant un calcul additif itératif.

Si la pose d'opérations en colonne (addition et soustraction) ne pose pas de difficulté au niveau des routines d'apprentissage, le déroulement des multiplications posées est émaillé de nombreuses erreurs lorsqu'il s'agit de traiter les calculs intégrant des 0 et le placement de la virgule (voir figure 2) :

$$\begin{array}{rr} & {}^{1}3\,6\,0 \\ \times & 4\,2{,}5 \\ \hline & 1\,3\,2\,0 \end{array}$$

Figure 2. Une multiplication

Ainsi, pour effectuer ce calcul, Lucie a multiplié les chiffres des unités de chaque nombre entre eux (5 x 0), les chiffres des dizaines (2 x 6) sans oublier de reporter la retenue au niveau des chiffres des centaines, puis a fini son calcul en multipliant les chiffres des centaines !

Résolution de problèmes additifs : Lucie obtient une note de 10 sur 12 à l'épreuve des problèmes arithmétiques du ZAREKI-R. Mais ce niveau de performance valide seulement des connaissances de Cours élémentaire, puisque les énoncés proposés à l'oral ne se réfèrent qu'à des situations élémentaires de type changement ou de type comparaison. Nous proposons en complémentarité des problèmes de type double transformation (Ménissier, 2011) : ceux-ci ont été échoués, que la recherche de l'inconnue porte sur une transformation ou qu'elle porte sur la combinaison des deux transformations.

Problèmes multiplicatifs (Ménissier, 2011) : on note une réussite aléatoire dans la classe de problèmes de proportion simple selon les situations en contexte. La valeur multipliée est reconnue et bien traitée (réussite aux problèmes dits de proportionnalité simple), mais Lucie ne sait reconnaître ni la valeur unitaire, ni la valeur de la quantité d'unités. Les problèmes de quatrième proportionnelle sont échoués par manque de compréhension de la relation quaternaire (que la recherche de l'inconnue porte sur la grandeur multipliée, la valeur de base ou la valeur multipliée). De même, Lucie ne comprend pas les problèmes de double proportionnalité et notamment ceux de type produit de mesures impliquant des données géométriques (échec dès la première étape *traduction des données*).

Résultats à l'EVAC (Echelle Verbale d'Aptitudes Cognitives, Lussier & Flessas, 2003) :

- Echelle simultanée : 19/32, → niveau CM 1
  - Symboles mathématiques 9/12 (niveau CM 2)
  - Représentation des rapports spatiaux : 1/5 (niveau CE 2)
  - Image mentale : 9/15 (niveau CE 2)
- Echelle séquentielle : 29/48 → niveau CM 1
  - Alphabet oral : 5/10 (niveau CM 1)
  - Syllabes : 13/16 (niveau 5ième)
  - Question de temps : 6/12 (niveau CM 1)
  - Alphabet écrit : 5/10 (niveau CE 2)
- Compétences linguistiques : 25/57 → niveau CM 1
  - 1°) Versant réceptif : 17/28 (niveau CM 2)
  - Devinettes : 5/12 (niveau CM 1)
  - Mots manquants : 8/11, (niveau 6e)
  - Expressions : 4/5 (niveau 4e)
  - 2°) Versant expressif : 8/29 (niveau CE 2)
  - Mots de liaison : 4/13 (niveau CE 2)
  - Connaissances lexicales : 4/16 (niveau CE 2)

Toutes les performances de Lucie se situent sous le percentile 15, sauf les épreuves syllabes (percentile 34) et expression (percentile 39).

Opérations infra-logiques :

- Conservation physique du poids (Piaget & Inhelder, 1962) :

La réussite est partielle, avec un échec lors de la deuxième transformation (de la pâte en galette mise en serpentin) : « *c'est plus léger parce que c'est plus long…* », alors qu'auparavant (boule transformée en galette), on relève un type de réversibilité par identité, avec l'argumentation « *y'a toujours le même poids quelle que soit sa forme* ».

- Conservation des volumes spatiaux (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948 ; Ménissier, 2002b) épreuve piagétienne des îles[2] :

On ne relève aucune réussite, par non-compréhension des relations entre les différentes coordonnées : « *on ne peut pas prendre le même volume, vu que c'est pas la même forme… pour que ça fasse le même volume, faut les mêmes dimensions !* »
Lucie atteint donc des conservations de niveau opératoire d'âge 8-9 ans sur les opérations infra-logiques.

Opérations logico-mathématiques :

- Structure de classification (Piaget & Inhelder ; 1959), épreuve dichotomique des classes :

Lucie ne déroule dans cette épreuve que très peu de mobilité rétroactive sur la recherche des différentes vicariances. D'ailleurs, le troisième critère (grosseur) n'est pas trouvé spontanément. Elle agit par contrôle ascendant (passage des sous-collections initiales à de plus grands ensembles par réunions progressives) et non par un contrôle descendant (passage des ensembles plus généraux aux plus spéciaux par subdivisions ou dichotomies) car on relève un classement des éléments en sous-collections effectué de proche en proche (maximum de ressemblance en compréhension) : le classement ainsi construit manque de mobilité rétroactive gênant la prise en compte du changement de critère et par conséquent, et pour les mêmes raisons, de mobilité anticipatrice.

- Opération de relation asymétrique (épreuve de transitivité des longueurs d'Achenbach & Weisz, cités par Bideaud, 1988) :

Pour évaluer la compréhension des relations asymétriques transitives, nous utilisons l'épreuve de transitivité des longueurs, cette épreuve de sériation s'avérant plus facile qu'une épreuve de transitivité verbale. Le matériel est très simple à constituer : 5 crayons de couleur différente A > B > C > D > E, variant de 11 à 13 cm pour que leur différence soit difficilement constatable. On fait comparer à l'enfant A et B, puis B et C et l'on place les trois crayons en colonne l'un sous l'autre. D et E sont placés dans une seconde colonne avec D en face de B et E en face de C : il y a donc une place vide en face de A.

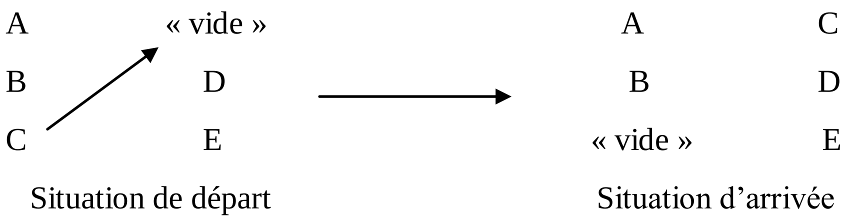

Figure 3. L'épreuve de transitivité des longueurs

[2] Cette épreuve permet une analyse qualitative de la relation mathématique entre les surfaces et les volumes. A partir d'un bloc A représentant le volume d'un immeuble placé sur une île, les habitants qui doivent déménager veulent conserver sur une surface plus petite « la même chose de place qu'auparavant » (B). Il faut donc réaliser avec des petits cubes un espace volumétrique identique à A mais de base plus petite en B, (et ainsi de suite). Si cette conservation n'est acquise qu'après 11-12 ans, c'est parce que la constance des verticales et des horizontales ne l'est qu'à 9 ans, dans la mesure où celles-ci constituent un système d'ensemble de coordonnées.

Le crayon C est déplacé de la première colonne vers la place vide. L'enfant compare alors C et D, puis D et E : il devra répondre ensuite à la question de transitivité portant sur le couple B et D (*lequel est le plus grand et comment le sais-tu ?).* On notera d'une part la présence ou l'absence d'inférence déductive dans l'argumentation verbale ; d'autre part, on relèvera la différenciation entre ce qui est constatable de ce qui est inférentiel. Précisons encore qu'il est nécessaire pour réussir cette épreuve de mémoriser les informations pertinentes puis de les intégrer dans une représentation de l'ordre linéaire (codage linguistique et/ou localisation spatiale). Lucie réussit assez facilement cette épreuve, la transitivité est donc acquise avec une bonne argumentation logique (« *si le vert est plus grand que le rouge et que le rouge est plus grand que le jaune, alors forcément le vert est plus grand que le jaune* »)

- L'épreuve de Décision Logique (Ménissier, 2011) :

Lucie a dévoilé de nombreuses difficultés dans la compréhension des structures syntaxiques (marqueurs spatiaux et temporaux, locutions de relation) : 10 erreurs sont constatées sur les 20 items proposés. Elle manque de nombreuses connaissances linguistiques et factuelles (notamment sur les conversions des mesures continues de longueur et de poids).

- Compétences mnésiques :

En mémoire immédiate, l'empan mnésique est bloqué à 5 (donnant une note de 8/12 à l'épreuve de rétention de chiffres du ZAREKI-R), tandis qu'en mémoire de travail, Lucie obtient une rétention et un rappel de 3 chiffres à rebours pour une note de 5/12 (note totale de 13/24 avec σ de – 0,76).

Synthèse du bilan :

A travers les épreuves de bilan, nous dégageons une catégorisation d'éventuels troubles de la cognition mathématique en repérant la mise en place de différents composants. S'il est clair que ces constituants élémentaires ne permettent pas d'expliquer la grande variabilité des performances d'un enfant par le fait même des contraintes pragmatiques et des modalités de présentation, ils permettent cependant de dégager, par une simplification nécessaire à la démarche clinique, une catégorisation des troubles d'apprentissage en inférant de leur plus ou moins bonne acquisition. Dans notre analyse des épreuves et des situations-problèmes présentées, nous avons donc postulé la présence d'un certain nombre de composants élémentaires dont l'acquisition est indispensable au fonctionnement cohérent des opérations de traitement (Séron, 1993). Ces composants, que nous reprenons ci-après, sont impliqués à des degrés divers dans les tâches concernant la manipulation et le traitement numériques :

Le *composant linguistique* intervient dans les activités de comptage (acquisition de la chaîne numérique verbale), de dénombrement, de transcodage numérique (aux niveaux lexical et syntaxique), de compréhension des consignes et dans la traduction des problèmes (formulation des énoncés)… Lucie a du mal avec le vocabulaire spécifique mathématique et échoue dans les activités et les résolutions de problèmes, du fait de l'imprécision sémantique des termes employés et d'une mauvaise traduction des données linguistiques.

Le *composant arithmétique* intervient non seulement dans la résolution d'opérations, d'équations ou l'estimation de grandeurs, mais encore dans les systèmes de mesure, la gestion des procédures et la résolution de problèmes (exécution de la solution)… Lucie n'a pas mis en place un calcul réfléchi efficace qui pourrait être facilité par le recours à des procédures analogiques peu disponibles ou pour le moins inefficaces. Lucie se contente de dérouler des procédures par surcomptage et ses connaissances déclaratives restent insuffisantes (items de la table de multiplication). La pose d'opérations en colonne (addition et soustraction) ne lui pose pas de difficultés au niveau des routines d'apprentissage, mais le déroulement des multiplications posées reste émaillé de nombreuses erreurs.

Le *composant mnésique* intervient quant à lui dans tout déroulement d'activité cognitive (ordonnancement des actions, traitement séquentiel, exécution de calculs réfléchis, rappels de calculs intermédiaires) et dans la récupération en mémoire à long terme (MLT) de faits arithmétiques et mathématiques (tables d'opérations, règles algébriques, formules mathématiques…). La mémoire de travail permet d'autre part d'effectuer des tâches nécessitant la coordination de deux activités comme l'empan de chiffres à l'envers. La mémoire de travail de Lucie est faible et entraîne souvent une mauvaise gestion dans les différentes tâches qu'elle doit réaliser.

Le *composant sémantique* se retrouve notamment dans la comparaison de quantités, dans la mise en place du système décimal, dans l'intégration des problèmes (constitution de schémas prototypiques) et dans la planification des actions. Il donne accès aux représentations sémantiques des nombres par la constitution du mécanisme d'invariance quantitative et permet la résolution de problèmes par le calcul relationnel ou l'isomorphisme des mesures. Si la réversibilité opératoire de Lucie est disponible, celle-ci hésite très souvent à utiliser des arguments logiques. La manipulation de situations problèmes la laisse souvent perplexe, d'autant que son anticipation et sa planification des actions à envisager restent insuffisantes.

Le *composant perceptif* est prédominant dans les activités de dénombrement (évaluation globale, perception numérique immédiate et correspondance terme à terme), dans la pose des opérations, dans le repérage de la valeur d'un chiffre suivant sa position dans un nombre, dans le repérage d'une quantité sur une échelle analogique, dans le mode de présentation des énoncés ou en géométrie (espaces et figures géométriques : longueurs, surfaces et volumes ; catégorisation perceptive ; mesure-étalon…). Au niveau temporel, il permet la constitution de l'ordre sériel (avant / après), le déroulement de séquences d'action (simultanéité / successivité), la stabilité d'énumération de la chaîne numérique ou l'acquisition des mesures concernant le temps (heure, minute, seconde). Chez Lucie, le traitement cognitif des figures géométriques reste déficitaire et sa perception du temps est difficile ; ses connaissances temporelles doivent donc être consolidées.

La pratique clinique ne peut que s'enrichir d'une méthodologie qui aborde les activités mentales en les décomposant en leurs constituants les plus élémentaires. Cette perspective permet de mettre en évidence des parties fonctionnellement distinctes dans ce qui était considéré jusqu'alors comme un tout indifférencié. Les habiletés repérées sont essentiellement cognitives dans la mesure où elles concernent des traitements réalisés sur des représentations symboliques : une première difficulté d'interprétation réside dans l'analyse de l'organisation de ces traitements et non dans leur sortie sensori-motrice. En second lieu, le clinicien doit se méfier de ne pas confondre la procédure utilisée par le sujet avec le comportement observable engendré par celle-ci. La procédure n'a, après tout, qu'un statut de variable intermédiaire puisqu'elle peut être instanciée par des conduites multiples : il y a bien une différence entre la définition d'un fonctionnement et la définition des conduites de ce fonctionnement.

Diagnostic et projet orthophonique :

Au vu de ce bilan, Lucie présente donc un trouble du raisonnement logico-mathématique et une dyscalculie portant principalement sur les composants sémantique et procédural (Ménissier, 2003c). Mais en regard des connaissances actuelles, il serait plus juste de définir son trouble comme un trouble de la cognition mathématique.

Projet thérapeutique : Une rééducation est envisagée et conformément à la NGAP (Nomenclature Générale des Actes Professionnels des orthophonistes), trente séances sont demandées. Nous définissons alors un certain nombre d'objectifs de rééducation et un plan de soins est proposé (une séance hebdomadaire, compte-tenu de nos possibilités de prise en charge et des difficultés de déplacement) :

• Développer la mémoire de travail et la planification des tâches à effectuer.
• Travailler sur la prise de décision logique et la pertinence entre schèmes dangereux et schèmes pertinents dans des situations en contexte.
• Etendre le champ des répertoires stratégiques dans le calcul additif, par mobilisation des stratégies analogiques de décomposition/recomposition. Développer les connaissances déclaratives du calcul multiplicatif.
• Travailler le domaine linguistique du vocabulaire mathématique dans la traduction des données et les consignes d'exercices. Pour cela, nous avons choisi d'emprunter *le chemin des écoliers* en « interrogeant » son livre de mathématique de 4e afin de sélectionner les mots importants à connaître dans les consignes. Un premier lexique spécifique mathématique apparait et sera travaillé spécifiquement :
- Somme / différence / produit / quotient.
- Nombre arrondi / nombre décimal / expression littérale.
- Numérateur / dénominateur.
- Réduire / développer / factoriser / simplifier.
- Encadrer / convertir…

Si le bilan vise à établir ou à infirmer un diagnostic précis, il permet aussi de déterminer les objectifs de la rééducation et de cibler une approche réaliste de la prise en charge. Le clinicien se doit donc de faire la part entre les conceptions erronées et/ou parcellaires des acquis de la cognition mathématique. La remédiation développera ainsi une mise en contexte des situations-problèmes afin de travailler sur la prise de décision logique et la pertinence entre schèmes dangereux et schèmes pertinents. Pour cela, il nous faudra revenir sur quelques principes de base :

❑ Savoir reconnaître et différencier les schèmes pertinents et les schèmes dangereux dans les actions cognitives faites par Lucie.
❑ Mettre Lucie en situation de réussir en développant la recherche et la mobilisation des schèmes pertinents. Pour cela, nous n'hésiterons pas à suivre parfois « *le chemin des écoliers* ».
❑ De plus, il nous faudra proposer un certain nombre d'exercices spécifiques afin de consolider la bonne application du schème pertinent : en cela, Lucie doit construire et élaborer ses propres règles de fonctionnement.

b. Aspects rééducatifs

1. La compréhension du système décimal :

Lucie a beaucoup de difficultés à écrire les nombres dans leur forme chiffrée. Le transcodage d'un nombre verbal écrit vers un numéral arabe est source de nombreuses erreurs sur de nombreux numéraux : Lucie commet notamment des erreurs de types a-contextuel et syntaxique sur le traitement des numéraux présentant des dizaines complexes et/ou dans le passage des mille (et de ses puissances de 10). Ainsi, la valeur positionnelle des chiffres dans le nombre reste loin d'être bien appréhendée chez notre collégienne.

Lors du bilan, sa représentation analogique d'un numéral arabe a révélé des erreurs sur la représentation des nombres incluant des dizaines complexes, Lucie effectuant un traitement séquentiel (du Numéral Verbal Oral (NVO) *cent soixante-quatorze,* Lucie choisit de placer en correspondance *1 plaque de 100, 6 bûchettes de 10 et 14 cubes)*.

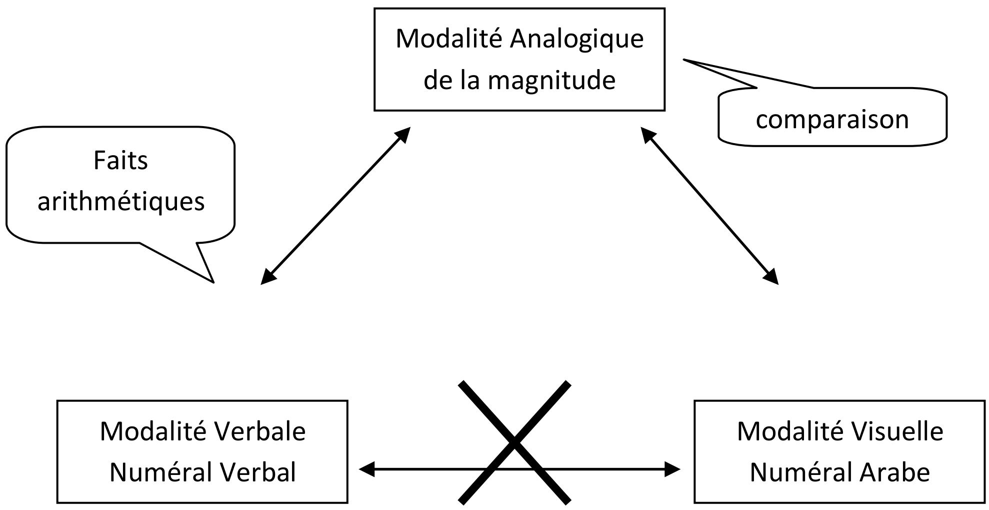

Figure 4. Modèle anatomo-fonctionnel du Triple Code (d'après Dehaene, 1992)

Le lien de causalité entre la maîtrise de la base 10 et les capacités en arithmétique a souvent été mis à l'épreuve (notamment Mayer, 1985 ; Noël, 2000, 2006). Ainsi Fuson (1988) note qu'un entraînement spécifique sur la compréhension du système décimal permet parallèlement une amélioration des capacités de calcul. Il est donc primordial pour Lucie d'élaborer une meilleure représentation décimale des nombres. Or, d'après le modèle du Triple Code (Dehaene, 1992), la relation entre les modalités verbale et visuelle semble poser problème pour Lucie (voir figure 4). En effet, au niveau de la représentation verbale, les nombres apparaissent comme des séquences de mots syntaxiquement organisés, alors que la représentation visuelle donne les nombres comme une liste ordonnée d'identités de chiffres. Mais ni la forme des numéraux arabes ni la structure verbale des mots ne contiennent d'information sémantique. C'est donc bien la représentation analogique des quantités numériques qui donne la signification sémantique du nombre. Il est donc important de prendre en compte cette dimension afin de vérifier que la récupération de la magnitude d'un nombre donné s'associe correctement avec les magnitudes d'autres nombres. De plus, cette représentation des quantités se présente comme une ligne numérique mentale orientée sur laquelle vont se distribuer les différentes quantités.

Dans la pratique, nous allons commencer par vérifier la bonne correspondance entre le transcodage d'un Numéral Arabe (NA) vers un codage analogique : pour cela, nous utilisons un matériel pédagogique nommé Base 10 (matériel présent chez de nombreux éditeurs pédagogiques), qui organise les unités sous forme de petits cubes, les dizaines sous forme de bûchettes (correspondant à 10 cubes emboîtés), les centaines sous forme de plaquettes (correspondant à 10 bûchettes emboîtées) et les unités de mille sous forme de gros cubes correspondant à 10 plaquettes emboîtées. Mais il faudra veiller à ne présenter que 9 petits cubes (correspondant aux neuf chiffres, si l'on excepte le zéro), 9 bûchettes, 9 plaques et au moins 2 gros cubes d'unités de mille. De même, il est bon de disposer de deux boîtes de matériel afin de pouvoir concrétiser correctement les éléments. Une première manipulation avec Lucie montrait en effet sa difficulté à comprendre la schématisation du matériel. Il a donc fallu matérialiser certaines bûchettes en un emboîtement de 10 petits cubes, certaines plaquettes comme un emboîtement de 10 bûchettes (tenues par un élastique), et un gros cube comme un emboîtement de 10 plaquettes (retenues de même par un élastique). Ainsi fait, nous pouvions travailler sur le transcodage correct d'un Numéral Arabe (NA) vers un codage analogique et inversement, de pratiquer un codage analogique vers une écriture en Numéral Arabe (NA). Rappelons que pour comprendre l'écriture d'un nombre comme 1 111, il faut prendre conscience de ce que représentent ces 4 chiffres. En effet, la valeur de chaque chiffre est multipliée par 10, chaque fois que l'on se déplace vers la gauche : (1 x 1000) + (1 x 100) + (1 x 10) + (1 x 1). Une fois cette disposition mise en place et comprise, le travail sur le rôle du 0 dans un numéral arabe peut aussi se comprendre par l'absence ou la présence d'éléments du modèle analogique (l'absence de barre de dizaines entraîne un 0 en position (0 x 10).

Dans un deuxième temps, une fois la bonne correspondance établie entre modalité analogique et modalité visuelle, nous travaillerons sur le transcodage d'un NVO vers un codage analogique (de la modalité verbale à la modalité analogique).

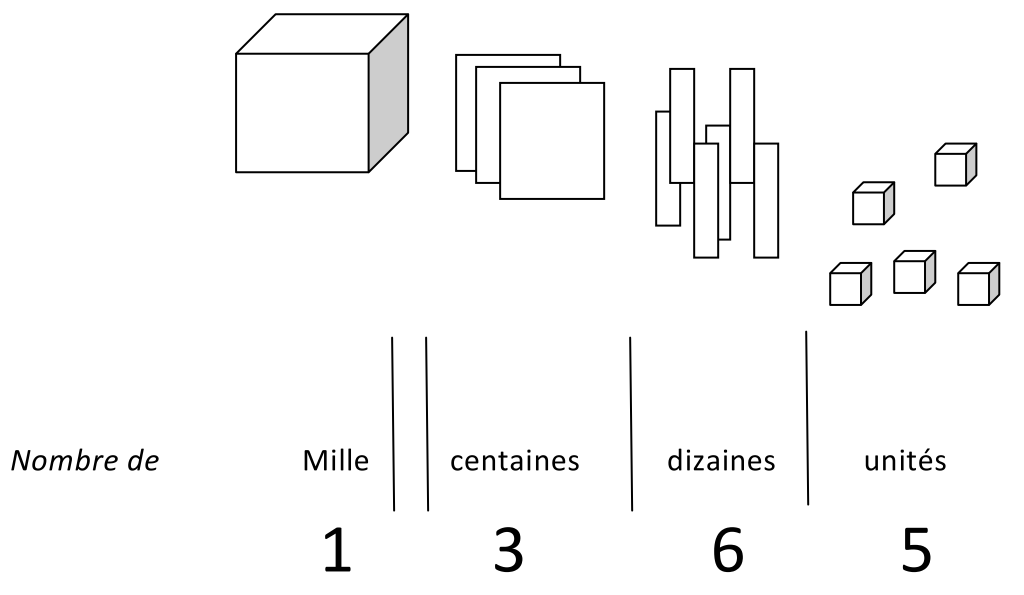

Figure 5. Présentation du transcodage de la modalité verbale à la modalité analogique.

Ce transcodage a présenté plus de difficulté pour Lucie, du fait de la nécessité de maintenir en mémoire de travail la forme verbale de la quantité traitée afin d'isoler le nombre d'unités, de dizaines, de centaines et d'unités de mille. On notera ici qu'il ne faut pas confondre l'emplacement du *chiffre des centaines* avec le *nombre de centaines,* car si 3 plaques représentent le chiffre 3 dans l'écriture arabe, ce nombre comprend bien 13 centaines (d'où l'importance de matérialiser le cube des unités de mille par 10 plaques réunies de centaines).

Enfin, on pratique le transcodage d'un NVO vers un Numéral Arabe (NA). A ce niveau, Lucie n'a pas encore mis en place la voie directe entre code verbal et code arabe et l'information doit encore transiter par la représentation sémantique mais si le matériel analogique reste présent sur la table de travail, elle doit se contenter de le regarder et d'analyser mentalement le transcodage (flèches mises en pointillés sur notre schéma, voir figure 6).

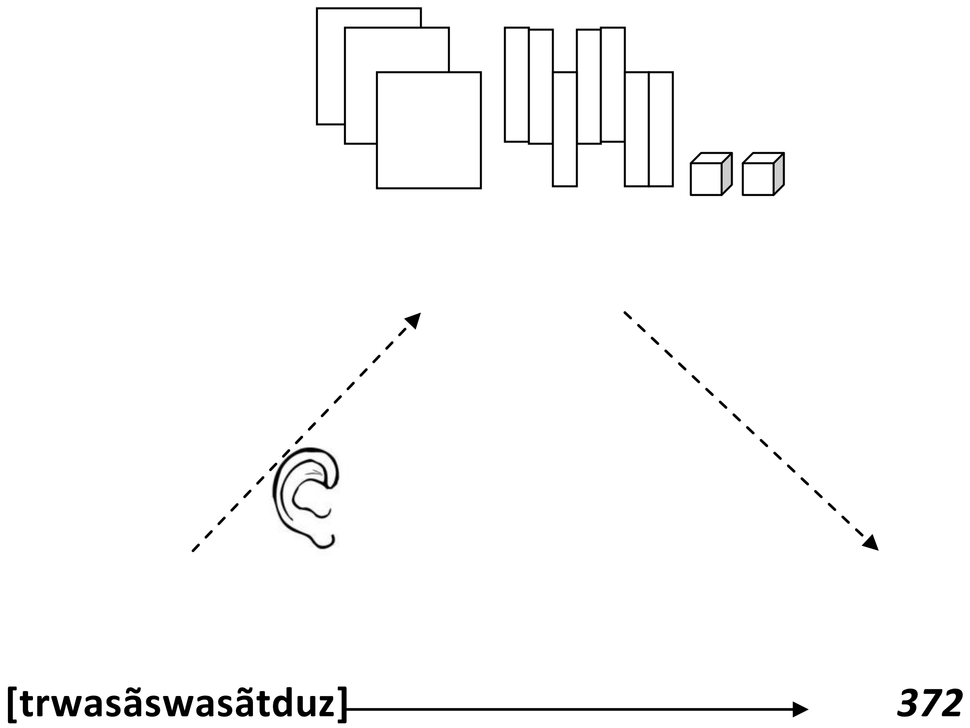

Figure 6. Présentation du transcodage d'un Numéral Verbal Oral (NVO) vers un Numéral Arabe (NA).

2. La représentation des grandeurs numériques (ligne numérique mentale) :

Nous avons vu précédemment que chaque code est dévolu à des traitements spécifiques, mais que seul le codage analogique contenait l'information sur la quantité. Ainsi, la représentation des grandeurs numériques s'assimile à une ligne numérique continue (et compressible, l'espace entre les nombres diminuant lorsque les nombres augmentent). Les difficultés que rencontre Lucie dans ses calculs proviennent aussi d'une représentation imparfaite de sa ligne numérique mentale. Rappelons-nous, dans le bilan, ses difficultés à appréhender les repères numériques demandés tant en estimation qu'en production de longueur, et son semi-échec au subtest *des lignes vierges* du test Zareki-R ;

car pour réussir ce type d'épreuves, il faut considérer le nombre, non en tant que quantité d'éléments, mais en référence à une position. En effet, même si la graduation d'une droite provient de reports successifs d'une unité de référence (ce qu'a fait Lucie en ajoutant mentalement une même longueur, mais sans coordonner celle-ci à la longueur totale !), l'abscisse d'un point correspond non à une mesure de longueur mais à la position d'un point. Ce qui fait dire à Vergnaud que « *représenter des nombres par des points sur une droite orientée est devenu si naturel qu'on a peine à imaginer les difficultés auxquelles un tel système symbolique donne lieu chez les enfants* » (1987, p. 836). Lucie n'a pas su se servir de l'échelle fournie et n'a pu appréhender l'amplitude des intervalles à considérer. Le placement correct des nombres chez Lucie reste encore imparfait et sa construction des représentations numériques se doit d'être améliorée. Pour ce faire, nous dessinons une ligne marquée (notée dans notre exemple de 0 à 2 000, voir figure 7) et Lucie place sur celle-ci un nombre (par exemple 1100, comme ci-dessous) :

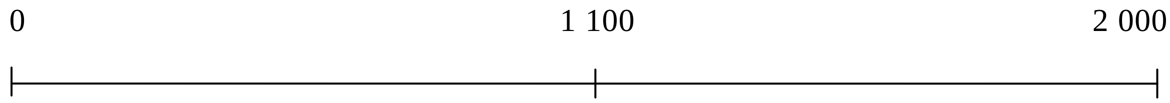

Figure 7. Travail sur une ligne marquée (n°1).

Puis un autre nombre (par exemple 1 010) est proposé. A Lucie de placer ce nombre sur la ligne… Il est important d'avoir avec elle des interrogations comme [« pourquoi ce nombre est-il plus grand ou plus petit que 1 100 ? », « va-t-il se placer avant ou après 1 100 ? », « doit-on le placer près du trait de 1 100 ? »] (dans le sens conventionnel de lecture de la gauche vers la droite, voir figure 8) :

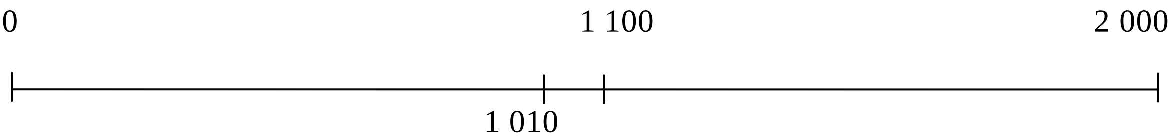

Figure 8. Travail sur une ligne marquée (n°2)

Plus il y aura de nombres placés plus l'analyse sera fine et plus se constitueront des fragments de la droite numérique mentale.

3. L'analyse clinique d'une rupture du développement :

Au cours du développement des nombres, l'enfant passe par différentes phases d'élaboration. Ainsi, il peut être capable de réussir une première tâche, et parallèlement échouer à une seconde tâche qui paraît pourtant mettre en œuvre les mêmes compétences développementales. Cette difficulté survient souvent lorsque l'enfant doit conceptualiser certaines propriétés des nombres mais nous la rencontrons aussi très souvent dans la remédiation de la résolution de problèmes.

Ce profil de performances correspond d'un point de vue cognitif à un problème d'attention sélective relié à un problème de conceptions partiellement justes (Meljac & Charron, 2002). Les perspectives cognitivistes et néo-structuralistes ont ainsi mis l'accent sur l'empan de la mémoire de travail et sur les processus d'attention et de contrôle, et Pascual-Leone (1988) intègre dans son modèle des capacités conjointes d'activation des schèmes pertinents et d'inhibition en regard de schèmes dits *« dangereux »* ou pour le moins inadaptés. De même, le modèle de Case (1985) définit des structures de contrôle exécutif qui régissent, compte tenu des connaissances intégrées en mémoire à long terme, des liaisons entre représentations, le tout étant tributaire de la capacité de la mémoire de travail. De plus, pour rétablir un lien entre stratégies et signification, nous ne devons pas oublier que chaque contexte de situation-problème requiert une spécification des schèmes : en d'autres termes, le clinicien doit tenir compte d'une reconstruction partielle des schèmes selon les contraintes propres à chaque situation particularisée et selon le niveau des significations attribuées à celle-ci.

a) Le repérage des schèmes dangereux et des schèmes pertinents

Il est important pour le clinicien de savoir reconnaître et individualiser les schèmes élémentaires employés par l'enfant :

- Un schème pertinent est un schème qui conduit à la réussite.
- Un schème « dangereux » est un schème qui aboutit à l'échec dans la réalisation d'un calcul ou d'un problème (ou qui est présent dans une procédure élémentaire mais inefficace à long terme).

→ L'enfant devra donc apprendre à sélectionner le schème adapté à une réalisation correcte :

- en apprenant à inhiber le schème dangereux,
- en renforçant l'activation du schème pertinent.

Mais pour cela, il lui faudra approfondir la connaissance de validité des procédures qu'il utilise.

b) Un travail sur les procédures de calcul additif et soustractif :

1°) <u>Calcul des Nombres entiers</u> :

Nous avons constaté lors du bilan que le répertoire stratégique de Lucie se déploie autour de quelques procédures. Son mode de résolution principal s'effectue principalement par surcomptage additif (avec commutativité acquise) et décomptage soustractif lorsque l'écart entre les deux valeurs est inférieur à 5. Dans sa pratique de collégienne, Lucie utilise donc le surcomptage digital comme un schème dangereux, car, même si cette procédure semble efficace au niveau d'un calcul élémentaire (le résultat obtenu est juste), elle s'avère inadaptée dans des calculs additifs et soustractifs nécessitant la manipulation de plus grandes quantités. Lucie accepte comme schème dangereux le fait de calculer en se servant de ses doigts. Elle sait donc qu'elle doit maintenant effectuer ses calculs « dans sa tête » (et uniquement dans sa tête !). Elle sait qu'elle dispose de quelques-unes des parties du schème pertinent du calcul analogique et notamment de l'appui sur la base 10 (mobilisation d'un schème familier, d'une routine), et nous allons prendre appui sur ces compétences pour l'aider à concaténer et combiner. Afin de construire le schème pertinent, il nous faut trouver des calculs adaptés permettant une mobilisation maximum de ce schème. Les premiers exercices s'attacheront donc à travailler le calcul mental d'additions et de soustractions avec un des deux termes étant proche de 10, telles que :

8 + 5	9 + 5	7 + 6	5 + 7
12 - 5	11 - 3	13 - 6	12 - 4
27 + 6	38 + 5	57 + 4	45 + 7
21 - 6	32 - 5	52 - 4	45 - 7
249 + 6	4 + 158	737 + 5	328 + 6
241 - 6	143 - 5	732 - 5	321 - 6

Comme on le voit sur ces exemples de calculs, il ne faut pas hésiter à proposer un travail avec des nombres à deux ou trois chiffres pour que la procédure analogique devienne opérante à tous les niveaux du système décimal. Ce travail est aussi complété avec des exercices de calcul mental tels que nous l'avons suggéré dans notre boîte de matériel « *Au bout du compte* » (2011) avec l'utilisation des cartes bi-faces Numéral Arabe/Numéral arabe.

> ➔ De plus, un travail à la maison sera demandé tel que l'apprentissage d'items de liste d'additions/soustractions élémentaires[3] (à faire au moins deux à trois fois par semaine au minimum).

Parallèlement, le clinicien proposera un travail visant à l'automatisation des faits multiplicatifs car il ne faut pas oublier qu'il existe des connexions inter-opérationnelles entre calcul additif et calcul multiplicatif. Lucie devait donc s'entraîner à la maison (avec sa maman) à compter des séries de *pas* (comptage en avant et comptage à rebours) :

- De 2 en 2 (jusqu'à 30).
- De 3 en 3 (jusqu'à 30).
- De 4 en 4 (jusqu'à 40),etc…

Les étapes de cette progression peuvent ainsi se décliner :

- Visualiser sur une frise numérique les *pas* effectués dans le comptage des séries,
- Visualiser sur une table de Pythagore ces mêmes *pas*,
- Commencer l'acquisition de la table de 2 (référence à la notion de double) jusqu'à l'automatisme,
- Apprendre la table de 4 en référence avec la table du 2 (on double les résultats de la table du 2 : par ex, on obtient 7 x 4 avec 7 x 2, et en multipliant le résultat par 2,
- Effectuer un apprentissage de type procédural en réalisant des exercices comme nous le suggérons dans notre logiciel « *Point d'interrogation n°2* » (2007) : *activités /calcul multiplicatif/ la table de Pythagore,*
- Proposer des « losanges de produits » à construire (ERMEL ; 1999) : on décompose un nombre en plusieurs facteurs successifs que l'on recompose ensuite en multiples différents.

24	48
12 x 2	6 x 8
6 x 2 x 2	3 x 2 x 8
3 x 2 x 2 x 2	3 x 2 x 4 x 2
3 x 4 x 2	3 x 2 x 2 x 2 x 2
3 x 8	3 x 4 x 2 x 2
24	12 x 2 x 2
	24 x 2
	48

Dans le modèle du Triple Code, Dehaene et Cohen (2000) postulent que les faits arithmétiques appris par cœur tels que 6 x 4 = 24 ne peuvent être récupérés que si l'énoncé est codé verbalement *six fois quatre,* permettant ainsi la récupération du résultat

[3] Deux feuilles d'opérations sont présentées en annexe 2.

vingt quatre au sein du même format verbal. De ce fait, nous demandions à Lucie de bien verbaliser oralement tous les énoncés arithmétiques multiplicatifs qu'elle travaillait.

2°) Calcul des Nombres relatifs :

La compréhension des nombres relatifs reste difficile pour nombre de collégiens, et les calculs qui en résultent dépendent souvent de conceptions erronées ou parcellaires des algorithmes de résolution. Au collège, Lucie utilise de nombreuses routines de fonctionnement pour pallier ces difficultés et mélange les règles des calculs additifs et multiplicatifs avec les nombres relatifs. Pour elle, quel que soit le calcul, « *plus plus, ça fait plus, moins moins, ça fait plus, et plus moins comme moins plus, ça fait moins…* ». Lucie s'est donc construit une théorie parcellaire qui lui permet d'obtenir parfois une solution correcte.

Ainsi :

(+ 4) + (+ 3) = (+ 7)	(juste)	(+ 4) x (+ 3) = (+ 12)	(juste)
(- 4) + (- 3) = (+ 7)	(erreur)	(- 4) x (- 3) = (+ 12)	(juste)
(+ 4) + (- 3) = (- 7)	(erreur)	(+ 4) x (- 3) = (- 12)	(juste)
(- 4) + (+ 3) = (- 7)	(erreur)	(- 4) x (+ 3) = (- 12)	(juste)

La grandeur des valeurs absolues n'est pas prise en compte dans le calcul additif et Lucie ne comprend pas pourquoi ses réponses sont parfois correctes, parfois incorrectes (et fortement barrées par son professeur de mathématiques !). Le domaine de validité des schèmes pertinents est donc à discuter. A ce propos, rappelons que Saada-Robert différencie dans un schème la notion de routine, de primitive et de procédure (1992, voir figure 9) :

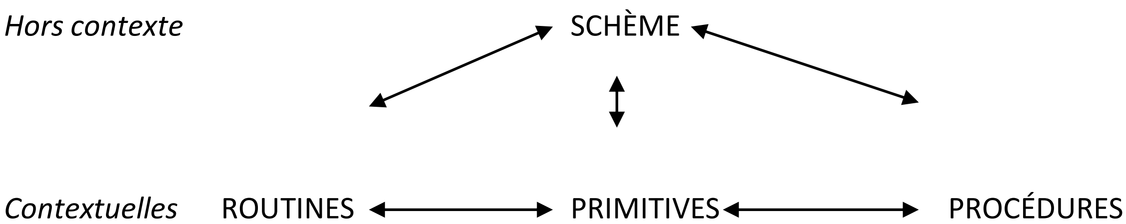

Figure 9. La notion de Schème selon Saada-Robert (1992).

Pour cette auteure, une *routine* est un schème familier au sujet, lié au contrôle ascendant, « *car son guidage est assumé par les aspects particuliers de l'objet (tels qu'ils sont sémantisés par le sujet)* » (1992, p. 123). La notion de *primitive* se réfère au guidage de la routine par le but (conduite téléonomique) et se définit par la signification attribuée à l'action en regard de la solution. La primitive est donc modifiable et recomposable selon la situation-en-contexte et permettra le déroulement d'une ou plusieurs procédures. Le repérage de micro-genèses cognitives dérive bien évidemment de cette analyse en termes de mobilisation et d'actualisation des schèmes, car « *dans la notion de micro-genèse, se trouve l'idée de travailler à une autre échelle temporelle que celle de la macro-genèse, mais surtout d'analyser les conduites cognitives dans le plus grand détail et dans toute leur complexité naturelle* » (Inhelder & de Caprona, 1992, p. 24).

Lucie dispose de quelques-unes des parties du schème pertinent du calcul relatif (mobilisation du schème familier), et comme nous l'avons fait précédemment avec les procédures analogiques, nous allons prendre appui sur ces compétences pour l'aider à les concaténer et les combiner. Afin de construire le schème pertinent, il nous faut trouver un problème adapté permettant une mobilisation maximum de ce schème. Nous proposons à Lucie une résolution de problèmes à partir de notre jeu « *Les petits lapins* » (matériel *A pas Comptés*, 2013).

Une bande numérique (voir figure 10) est placée devant Lucie (planche n° 1 permettant d'aller à + ou – 12), les quantités positives se situant vers la droite et les quantités négatives vers la gauche. Un lapin (pion) est posé sur la case 0 (symbolisée par une *borne*). Ce lapin peut aller à droite comme à gauche selon les lancers de dés (la partie se joue normalement à deux et, dans ce cas, il faut être le premier joueur à amener son lapin dans une case gagnante *carotte*, positive ou négative).

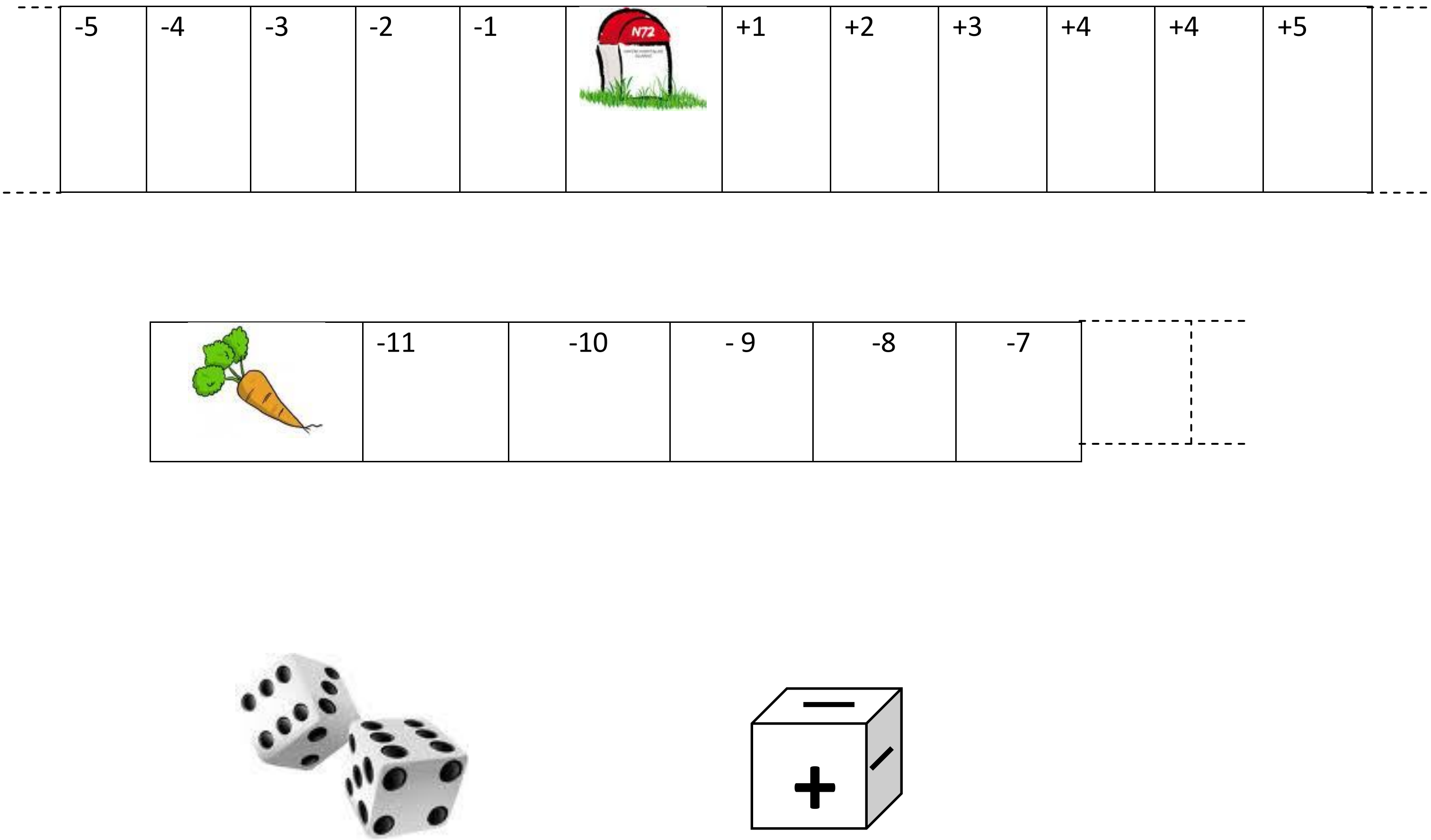

Figure 10. Le jeu des petits lapins.

Remarquons qu'avec Lucie, <u>nous ne « jouons » pas</u> et qu'il s'agit bien d'un travail de réflexion ! L'exercice consiste à lancer trois dés (deux dés *classiques* associés à un dé [+ / -]), puis à avancer ou reculer le pion selon les indications des lancers :

> *Si Lucie obtient un 7 (total des points des deux dés) et un +, elle avancera son pion de sept cases vers la droite. Si elle obtient un total de 4 et un – : elle reculera son pion de quatre cases vers la gauche.*

Lucie doit poursuivre sa mise en place d'une représentation ordonnée de la suite des nombres relatifs qui vérifie leur régularité et leur organisation de part et d'autre du point zéro. Nous allons privilégier le calcul relationnel par anticipation au détriment d'un simple déplacement du pion par correspondance terme à terme : en plaçant un cache devant le pion de Lucie (la flèche orientée dans le sens donné par le dé, voir figure 11), nous amènerons celle-ci à penser la transformation et le résultat à obtenir.

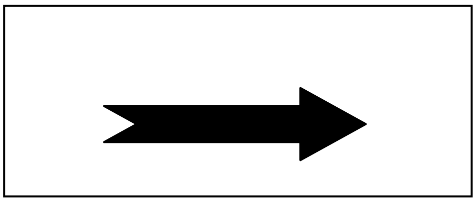

Figure 11. Cache du jeu des petits lapins.

Lors de son premier lancer, Lucie obtient un total de 5 et un +, elle pose donc son pion sur la case [+ 5]. A son deuxième lancer, elle obtient un total de 9 et un – : nous plaçons alors le cache à gauche de Lucie, flèche orientée vers la gauche. Puis elle calcule mentalement la case d'arrivée : *« ça sera dans les moins, il faut d'abord enlever les 5 du +, puis ce qu'il y a entre 5 et 9, c'est là que je vais arriver ! »* Elle pose correctement son pion sur la case [- 4]. Nous lui demandons alors de formuler par écrit le calcul effectué et Lucie écrit : 9 – 5 = 4.

En fait, Lucie se souvient de la procédure de son calcul arithmétique alors que nous lui demandions une écriture algébrique :

« Tu es partie de quel nombre ?

- *De 5.*
- *On va être plus précis : tu es partie de [+ 5]. Et ensuite?*
- *J'ai reculé de 9.*
- *Comment va-t-on l'écrire ?*
- *On va mettre (- 9).*
- *D'accord, tu peux maintenant écrire cette opération ?*

  Lucie écrit alors l'opération : + 5 - 9 = - 4. Afin d'éviter une surcharge cognitive, nous ne nous focalisons point sur la présence ou l'absence de parenthèses et continuons d'autres exercices. Ainsi, par exemple, nous obtenons :

- 4 - 6 = -10	- 10 + 7 = - 3	- 3 + 5 = + 2
+ 2 + 7 = + 9	+ 9 - 4 = + 5	- 3 - 6 = - 9
+ 4 - 6 = - 2	+ 5 + 6 = +11	…

Il nous faut maintenant généraliser et regrouper les opérations de même type. Lucie prend alors conscience de la notion de valeur absolue et dégage à sa manière les règles correctes du calcul additif de nombres relatifs :

« Quand j'ai deux moins, je garde le moins, c'est normal, je me déplace à gauche (référence au déplacement du pion du jeu) *mais j'ajoute les deux nombres. Avec deux plus, c'est facile, ça fait toujours plus. Quand il y a un plus et un moins, c'est là que je dois faire attention* (et ne pas tomber dans le déroulement d'un schème dangereux !), *je garde le signe du plus grand et je fais une soustraction ».*

L'exercice se poursuivra sur la séance suivante afin de consolider les règles de calcul et lors d'une troisième séance, nous renforçons le schème pertinent en présentant un problème complémentaire de même niveau de compétence. Nous proposons alors à Lucie le problème « *les petites voitures* » (dérivé de Perrot, Charnay, Gorlier & Colomb, 1984) :

« Pierre et Rémi jouent avec leurs petites voitures. Elles sont un peu particulières car on peut leur donner des ordres en utilisant un tableau d'affichage qui se trouve sur une télécommande. Par exemple, si on affiche Av 25, la petite voiture avance de 25 cm, et si on affiche Re 18, elle recule de 18 cm. »
Lucie propose alors de tracer une ligne numérique telle que (figure 12) :

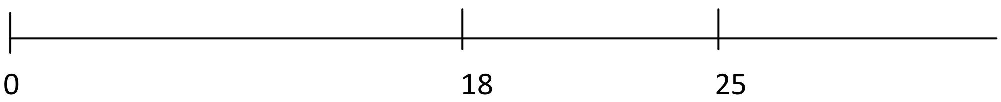

Figure 12. Ligne numérique n°1

Dans cette première représentation, le mouvement de la petite voiture n'est pas symbolisé. Lucie complète alors avec des flèches (figure 13) :

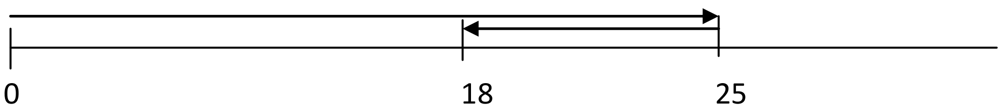

Figure 13.Ligne numérique n°2

Nous noterons ici que *droite numérique* et *bande numérique* (comme dans le jeu *des petits lapins*) entraînent deux représentations symboliques différentes. La bande numérique se compose de cases discrètes alors que la droite numérique renvoie à une mesure d'une quantité continue constituée d'une infinité de points. Lucie se sert donc d'une symbolisation beaucoup plus abstraite et le travail étayé par une représentation de type bande numérique peut s'estomper pour des tracés privilégiant la droite numérique. L'exercice sur le déplacement de la petite voiture permet d'élaborer des calculs réfléchis sur de plus grands nombres et Lucie va elle-même simplifier sa représentation symbolique (figure 14) :

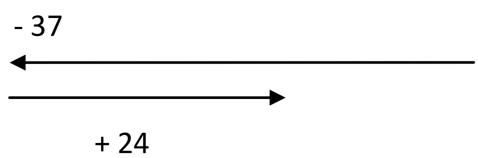

Figure 14. Simplification du schéma.

« Si je ne me rappelle pas de la règle, avec les flèches, je peux savoir si c'est un plus ou un moins qu'il va y avoir au résultat ! »
La réussite motive à présent Lucie car elle dispose de domaines de validité des schèmes du calcul relatif suffisants pour les sélectionner à bon escient, mais il faudra veiller cependant à ce que le schème dangereux ne réapparaisse pas, car chaque domaine de connaissances n'entraîne pas systématiquement l'application directe du bon schème. Nous ne devons pas oublier que chaque contexte de situation-problème requiert une spécification des schèmes : en d'autres termes, le clinicien doit tenir compte d'une reconstruction partielle des schèmes selon les contraintes propres à chaque situation particularisée et selon le niveau de significations attribuées à celle-ci. Par la suite, Lucie

devra donc apprendre à sélectionner le meilleur schème adapté et pour cela, il lui faudra approfondir ses connaissances procédurales et agrandir le domaine de validité des procédures utilisées (Vergnaud, 1991).

Pour résumer, lors d'un travail qui veille à l'acquisition et au bon déclenchement de schèmes pertinents, le clinicien aura comme principe de base de mettre l'enfant en situation de réussir par la recherche et la mobilisation des schèmes pertinents, tout en ancrant le plus souvent possible les situations problèmes dans le « réel ». S'il ne faut pas hésiter à suivre parfois « *le chemin des écoliers* », nous ne pouvons oublier que pour consolider l'application d'un schème pertinent, c'est l'enfant et lui seul qui construit et élabore sa propre règle de fonctionnement.

--------- BIBLIOGRAPHIE ---

Bideaud, J. (1988). *Logique et Bricolage chez l'enfant.* Lille : PUL.

Case, R. (1985). Intellectual development : birth to adulthood. New York : Academic press.

Chillier L., (2002). La ligne numérique et les codages du nombre chez l'enfant. Dans J. Bideaud et H. Lehalle (Eds), *Le développement des activités numériques chez l'enfant* (pp.129-149). Paris : Hermès Sciences Publications.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42. Consulté le 30.09.2016 de Unicog:
http://www.unicog.org/publications/Dehaene_VarietiesOfNumericalAbilities_Cognition_1992.pdf

Dehaene, S., Cohen, L. (2000). Un modèle anatomique et fonctionnel de l'arithmétique mental. Dans M. Pesenti et X. Seron, *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres* (pp.191-232). Marseille : Solal.

ERMEL -INRP- (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM 2*. Paris : Hatier.

Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New-York: Springer.

Inhelder, B., De Caprona, D. (1992). Vers le constructivisme psychologique : structures ? procédures ? Les deux indissociables. Dans B. Inhelder et G. Cellérier (Eds), *Le cheminement des découvertes de l'enfant : recherche sur les microgenèses cognitives* (pp.19-50). Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Lussier, F., Flessas, J. (2003). *Echelle Verbale d'Aptitudes Cognitives (EVAC)*. Paris: ECPA.

Mayer, R.E. (1985). Mathemathical ability. Dans R.J. Sternberg (Ed), *Human abilities: an information-processing approach* (pp. 127-150). New-York : Freeman & Co.

Meljac, C., Charron, C. (2002). Une approche constructiviste des remédiations dans le domaine numérique. Dans J. Bideaud et H. Lehalle (Eds), *Le développement des activités numériques chez l'enfant* (pp. 293-314). Paris : Lavoisier.

Ménissier, A. (1997). La recherche de l'invariant comme outil méthodologique dans l'acte de rééducation. *Rééducation Orthophonique, 35*(190), 163-169.

Ménissier, A. (2002a). Evaluer une activité mentale complexe : la résolution de problèmes additifs. Les dossiers de l'orthophoniste. *L'Orthophoniste,* 219, 19-26.

Ménissier, A. (2002b). Le bilan des activités logico-mathématiques : indications cliniques et pratiques. *Rééducation Orthophonique*, 212, 61-93.

Ménissier, A. (2003a). Les variations stratégiques chez l'enfant dans le calcul d'additions et de soustractions élémentaires. *Glossa*, 83, 20-33.

Ménissier, A. (2003b). *Recherche sur l'évaluation des troubles du calcul et du traitement du nombre.* UFR Médecine de Besançon, étude non publiée.

Ménissier, A. (2003c). Dyscalculie ou dyscalculies. *Orthomagazine*, 44, 30-32.

Ménissier, A. (2007a). *Point d'interrogation n°2. Résolution de calculs et de problèmes multiplicatifs.* Isbergues : OrthoEdition.

Ménissier, A. (2007b). *Tout compte fait. Développement des habiletés numériques et gestion des compétences logico-arithmétiques, 24 activités pour une maîtrise du calcul réfléchi. Livret explicatif, activités et matériel*. Isbergues : OrthoEdition.

Ménissier, A. (2011). Analyser, comprendre et travailler les problèmes arithmétiques. Dans M. Habib et M.P. Noël (Eds), *Calcul et dyscalculies, des modèles à la rééducation* (pp.78-129). Issy-les-Moulineaux : Elsevier-Masson.

Ménissier, A. (2012). *Au bout du compte. Habiletés numériques et calculs élémentaires.* Isbergues : OrthoEdition.

Ménissier, A. (2013). *A pas Comptés. Deux activités sur les calculs additifs et multiplicatifs.* Isbergues : OrthoEdition.

Noël, M.P. (2000). La dyscalculie développementale : un état de la question. Dans X. Séron, M. Pesenti, *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres* (pp.59-83). Marseille : Solal.

Noël, M.P. (2006). *La dyscalculie, trouble du développement numérique chez l'enfant,* Solal, Marseille.

Noël, M.P., Grégoire, J. (2015). Tedi-math grands. Test diagnostique des compétences de base en mathématiques pour les enfants de CE2 à la 5e. Paris : ECPA.

Pascual-Leone, J. (1988). Organismic processes for neo-piagetian theories: a dialectical causal account of cognitive development. Dans A. Demetriou (dir), *The neo-piagetian theories of cognitive development: toward an integration* (pp.25-64). Amsterdam: North-Holland.

Perrot, G., Charnay, R., Gorlier, S., Colomb, J. (1984). *Math Hebdo – classe de CE2*. Paris : Hachette Ecoles.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique, Tome I : la pensée mathématique.* Paris : PUF.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant.* Paris : PUF.
Piaget, J., Inhelder, B. (1962). *Le développement des quantités physiques chez l'enfant. Conservation et atomisme.* Neuchâtel : Delachaux et Niestlé (2é édition augmentée).

Piaget, J., Inhelder, B. (1959). *La genèse des structures logiques élémentaires ; classifications et sériations.* Neuchâtel-Paris : Delachaux et Niestlé.

Saada-Robert, M., (1992). La construction microgénétique d'un schème élémentaire. Dans B. Inhelder, G. Cellérier (Eds), *Le cheminement des découvertes de l'enfant : recherche sur les microgenèses cognitives* (pp.119-137). Neuchâtel : Delachaux et Niestlé

Seron, X. (1993). *La neuropsychologie cognitive.* Paris : PUF.

Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française*, *30*(3-4), 245-252.

Vergnaud, G. (1987). Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant. Dans J. Piaget, P. Mounoud, J.P. Bronckart, *Psychologie, Encyclopédie de la Pléïade* (pp. 821-844). Paris : Gallimard.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2.3), 133-169.

Von Aster, M. (2006). *ZAREKI –R. Batterie pour l'évaluation du traitement des nombres et du calcul chez l'enfant.* Adaptation française de G. Delatollas. Paris : ECPA.

------- BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE -------------------------------

Barrouillet, P., Camos, V. (2006). *La cognition mathématique chez l'enfant.* Marseille : Solal.

Bastien, C. (1987). *Schèmes et stratégies dans l'activité cognitive de l'enfant.* Paris : PUF.

Bastien, C., Bastien-Toniazzo, M. (2004). *Apprendre à l'école.* Paris : A.Colin.

Berthoz A. (2013). *La Vicariance : le cerveau créateur de mondes.* Paris : Editions Odile Jacob.

Bideaud, J., Houdé, O. (1991) *Cognition et développement. Boîte à outils théoriques.* Berne : Peter Lang.

Boder, A. (1992). Le schème familier, unité cognitive procédurale privilégiée. Dans B. Inhelder et G. Cellérier (Eds), *Le cheminement des découvertes de l'enfant : recherche sur les microgénèses cognitives.* Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Cauzinille-Marmèche, E. (1996). Résolution de problèmes et acquisition de connaissances. Dans A. Lieury et coll., *Manuel de psychologie de l'éducation et de la formation.* Paris : Dunod.

Cellérier, G. (1979). Structures cognitives et schèmes d'action I. *Archives de Psychologie, XLVII*(180), 87-104.

Cerquetti-Aberkane, F. (2000). *Enseigner les mathématiques à l'école.* Paris : Hachette.

Charnay, R. (1998). De l'école au collège : les élèves et les mathématiques. *Grand N,* 62, 35-47. Consulté le 30.09.2016 de IREM de Grenoble *:* http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=62

Clément, E. (2003) L'analyse de l'activité dans les situations de résolution de problèmes. *Psychologie et psychométrie*, *24*(4), 25-36. Consulté le 30.09.2016 de ResearchGate : https://www.researchgate.net/publication/256323295_L'analyse_de_l'activite_dans_les_situations_de_resolution_de_problemes

Clément, E. (2009). *La résolution de problème. A la découverte de la flexibilité cognitive.* Paris : A. Colin.

De Vecchi, G., Carmona-Magnaldi, N. (2002). *Faire vivre de véritables situations-problèmes.* Paris : Hachette.

Doise, W., Mugny, G. (1997). *Psychologie sociale et développement cognitif.* Paris : Armand Colin.

Dupuis, C., Pluvinage, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en didactique des mathématiques, 2/2,* 165-212.

Ehrlich, S. (1990). *Sémantique et mathématique. Apprendre-enseigner l'arithmétique simple.* Paris : Nathan.

Fayol, M. (2013). *L'acquisition du nombre*. Paris : PUF, coll. Que sais-je ?

Fénichel, M., Pfaff, N. (2005). *Donner du sens aux mathématiques, tome 2. Nombres, opérations et grandeurs*. Paris : Bordas.

Gauchet, M., Blais, M.C., Ottavi, D. (2014). *Transmettre, apprendre*. Paris : Stock.

Giordan, A. (1998). *Apprendre.* Paris : Belin.

Hofstadter, D., Sander, E. (2013). *L'Analogie, cœur de la pensée.* Paris : Odile Jacob.

Houdé, O. (1995). *Rationalité, développement et inhibition : un nouveau cadre d'analyse.* Paris : PUF.

Houdé, O. (2014). *Le raisonnement.* Paris : PUF, coll. Que sais-je ?

Houdé, O., Joyes, C. (1995). Développement logico-mathématique, cortex préfrontal et inhibition : l'exemple de la catégorisation. *Revue de Neuropsychologie*, *5*(3), 281-307.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, 69, 31-52. Consulté le 30.09.2016 de IREM de Grenoble : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=69

Lemaire, P., Duverne, S., El Yagoubi, R. (2002). Le développement des stratégies en situation de résolution de problèmes arithmétiques. Dans J. Bideaud et H. Lehalle (Eds), *Le développement des activités numériques chez l'enfant (pp.195-211).* Paris : Hermès Sciences Publications.

Levain, J.P. (1997). *Faire des maths autrement : développement cognitif et proportionnalité*. Paris : L'Harmattan.

Meljac, C., Lemmel, G. (2007). *Observer et comprendre la pensée de l'enfant avec l'UDN-II*. Paris : Dunod.

Monnier, N. (2003). Les schémas dans les activités de résolution de problèmes ? *Grand N*, 71, 25-47. Consulté le 30.09.2016 de IREM de Grenoble : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=71

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems : theoretical approaches and empirical findings. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the Middle Grades (pp.19-40).* Hillsdale, N.J.: Erlbaum et Reston, VA: National Concil of Teachers of Mathematics.

Noël, M.P., Seron, X. (2001). Les dyscalculies chez l'enfant. Dans J.A. Rondal et A. Comblain (Eds), *Manuel de psychologie des handicaps. Sémiologie et principes de remédiation (pp.283-312).* Bruxelles : Mardaga.

Orsini-Bouichou, F. (1976-1977). A propos du concept piagétien de schème et d'apprentissage. *Bulletin de Psychologie,* 327, XXX, 325-330.

Orsini-Bouichou, F. (1982). *L'intelligence de l'enfant. Ontogenèse des Invariants.* Paris: Editions du CNRS.

Piaget, J., Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant.* Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Rodriguez, A. (2009). *Un projet pour enseigner le calcul mental réfléchi.* Paris : Delagrave Edition.

Rossi, S., Van der Henst, J.B. (2007). *Psychologies du raisonnement*. Bruxelles : De Boeck & Larcier.

Seron, X., Van der Linden, M. (2000). *Traité de neuropsychologie clinique, Tomes I et II.* Marseille : Solal.

Annexe 1

Résultats de Lucie aux épreuves du ZAREKI-R	**brute**	**maximum**	**σ**
1. DENOMBREMENT DE POINTS			
Première partie	3	/3	
Deuxième partie	2	/3	
NOTE BRUTE TOTALE DENOMBREMENT DE POINTS	5	**/6**	-0,57
2. COMPTAGE ORAL A REBOURS	4	**/4**	0,78
3. DICTEE DE NOMBRES	12	**/16**	-2,00
4. CALCUL MENTAL ORAL			
Additions	14	/16	0,45
Soustractions	4	/16	-2,03
Multiplications	10	/12	-0,43
NOTE BRUTE TOTALE CALCUL MENTAL ORAL (Additions + Multiplications + Soustractions)	**28**	**/44**	-1,05
5. LECTURE DE NOMBRES	12	**/16**	-3,00
6. POSITIONNEMENT DE NOMBRES SUR UNE ECHELLE VERTICALE			
LIGNES MARQUEES			
Première partie: présentation orale	6	/6	
Deuxième partie: présentation écrite	6	/6	
NOTE BRUTE TOTALE LIGNES MARQUEES	12	/12	
LIGNES VIERGES			
Troisième partie: présentation orale	3	/6	
Quatrième partie: présentation écrite	3,5	/6	
NOTE BRUTE TOTALE LIGNES VIERGES	6,5	/12	
TOTAL POSITIONNEMENT DE NOMBRES SUR UNE ECHELLE VERTICALE	**18,5**	**/24**	0,24
8. COMPARAISON DE DEUX NOMBRES PRESENTES ORALEMENT	10	**/16**	-1,86
9. ESTIMATION VISUELLE DE QUANTITES	3	**/5**	-1,00
10. ESTIMATION QUALITATIVE DE QUANTITES EN CONTEXTE	5	**/10**	-1,17
11. PROBLEMES ARITHMETIQUES PRESENTES ORALEMENT	10	**/12**	0,46
12. COMPARAISON DE DEUX NOMBRES ECRITS	9	**/10**	-2,25
NOTE TOTALE	**117**	**/163**	**-1,42**
7. REPETITION DE CHIFFRES			
A l'endroit	8	/12	
A rebours	5	/12	
TOTAL REPETITION DE CHIFFRES	**13**	**/24**	-0,76

Annexe 2

Additions élémentaires

9 + 9	2 + **5**	**9** + 1	**8** + 3
7 + 2	**8** + 3	**8** + 2	**5** + 4
2 + **9**	4 + **5**	1 + **6**	3 + **5**
6 + 6	**7** + 7	**6** + 5	**9** + 2
3 + **8**	**5** + 2	**5** + 3	**7** + 3
6 + 3	3 + **7**	3 + **9**	**7** + 6
8 + 4	2 + **6**	2 + **8**	**9** + 3
4 + **8**	4 + **5**	3 + **6**	**7** + 4
9 + 5	**6** + 2	4 + **6**	**8** + 8
7 + **8**	5 + **9**	5 + **6**	4 + **9**
6 + **8**	5 + **8**	**9** + 8	**9** + 6
4 + **7**	**8** + 6	**6** + 5	8 + **9**
1 + **8**	5 + **7**	**7** + 6	**9** + 4
7 + **9**	1 + **7**	**8** + 7	2 + **6**
8 + 5	**9** + 7	6 + **7**	4 + **6**

Calculs élémentaires

9 + 9	13 - 5	9 + 7	11 - 3
7 - 2	8 - 3	8 + 8	11 - 4
18 - 9	14 - 7	4 + 6	12 - 5
7 + 6	8 + 7	16 - 8	9 + 5
7 + 8	15 - 4	15 - 6	9 - 5
6 - 3	13 - 4	3 + 9	17 - 9
8 - 4	4 + 9	4 + 8	9 + 8
4 + 8	4 + 8	12 - 3	7 + 9
9 - 5	16 - 10	14 - 5	14 - 8
17 - 7	15 - 9	5 + 6	4 + 9
6 + 8	5 + 8	11 - 6	13 - 5
14 - 6	8 - 6	6 + 5	8 + 9
11 - 8	13 + 7	7 + 6	19 - 10
11 - 3	20 - 7	9 + 7	16 - 9
8 + 5	19 - 6	8 + 7	9 + 6